現代数学基礎 BI　5 月 30 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題. n を 2 以上の整数とし, $V=\mathbb{C}^n$ を複素数体上の n 次元数ベクトル空間とする. また $e_1,\dots,e_n$ を単位ベクトルからなる V の標準基底とし, $W\subset V$ を $w:=e_1+\cdots+e_n\in V$ が生成する 1 次元部分空間とする. 商空間 V/W に関して, $v\in V$ の同値類を $[v]\in V/W$ と書く.

(1) 任意の $v\in V$ に対して, $[v]=0\Leftrightarrow v\in W$ を示せ.

(2) $[e_1-e_2],[e_2-e_3],\dots,[e_{n-1}-e_n]$ が V/W の基底である事を示せ.

(3) $[e_1]\in V/W$ を (2) の基底の一次結合で表せ.

解答. (1) V 上の二項関係 $\sim$ を $v,v'\in V$ について $v\sim v' :\Leftrightarrow v-v'\in W$ で定めると, これは同値関係で, V/W は集合としては $V/\sim$ で与えられる. そして $v\in V$ に対して $[v]=\{v'\in V\mid v'\sim v\}$ である. また V の零元を 0_V と書くと, V/W の零元は $0:=[0_V]$. 従って

$$[v]=0 \iff [v]=[0_V] \iff v\sim 0_V \iff v-0_V\in W \iff v\in W.$$

(2) $\dim(V/W)=\dim V-\dim W=n-1$ だから, $[e_i-e_{i+1}]$ 達が一次独立である事を示せば十分. $\sum_{i=1}^{n-1}c_i[e_i-e_i+1]=0$, $c_i\in\mathbb{C}$ とすると, $\sum_{i=1}^{n-1}c_i[e_i-e_i+1]=[\sum_{i=1}^{n}c_i(e_i-e_{i+1})]$ だから, (1) より $\sum_{i=1}^{n-1}c_i(e_i-e_{i+1})\in W$. よって適当な $c\in\mathbb{C}$ を用いて

$$\sum_{i=1}^{n-1}c_i(e_i-e_{i+1})=c(e_1+\cdots+e_n)$$

と書ける. e_i 達は基底なので $c_1=c$, $c_2-c_1=c$, $c_3-c_2=c$, …, $c_{n-1}-c_{n-2}=c$, $-c_{n-1}=c$. この連立方程式を解くと $c_i=ic$ $(i=1,\dots,n-2)$, $c_{n-1}=(n-1)c=-c$ となって, $c=c_1=\cdots=c_n=0$ が解. 以上より $[e_i-e_{i+1}]$ 達は一次独立.

(3) $[e_1]=\sum_{i=1}^{n-1}c_i[e_i-e_{i+1}]$, $c_i\in\mathbb{C}$ と置く. $0=\sum_{i=1}^{n-1}c_i[e_i-e_{i+1}]-[e_1]=[(c_1-1)e_1+\sum_{i=2}^{n-1}(c_i-c_{i-1})e_i-c_{n-1}e_n]$ なので, (1) より適当な $c\in\mathbb{C}$ を用いて

$$(c_1-1)e_1+\sum_{i=2}^{n-1}(c_i-c_{i-1})e_i-c_{n-1}e_n=c(e_1+\cdots+e_n)$$

と書ける. これから連立方程式 $c_1-1=c$, $c_2-c_1=c$, $c_3-c_2=c$, …, $c_{n-1}-c_{n-2}=c$, $-c_{n-1}=c$ が得られて, 解くと $c_i=ic+1$ $(i=1,\dots,n-2)$, $c_{n-1}=(n-1)c+1=-c$ となる. よって解は $c=-\frac{1}{n}$, $c_i=1-\frac{i}{n}$ $(i=1,\dots,n)$ となって, 答えは

$$[e_1]=\sum_{i=1}^{n-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)[e_i-e_{i+1}].$$

コメント. 各小問を 1 点とし, 3 点満点で採点しました. 平均点は 1.6 点でした.

まだ商空間をちゃんと理解していない方が多いですね. 特に (1) では V/W の零元が $[0]$ であることをしっかり把握して下さい.

以上です.