現代数学基礎 BI　5 月 30 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題 6.1 (講義ノート例 7.1.3 の一部)**.** 正方行列のトレースを取る写像 $\mathrm{tr}\colon M(n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ が全射線形写像であることを示せ.

問題 6.2 (講義ノート系 7.1.4 の一部)**.** 線形空間 V とその部分空間 $W, W' \subset V$ に対し, 写像 $\iota\colon W' \to W + W'$, $w' \mapsto 0 + w'$ が単射線形であることを示せ.

問題 6.3 (講義ノート系 7.1.5 の一部)**.** $V \supset W \supset W'$ を線形空間とその部分空間の列とし, $p\colon V \to V/W$ と $p'\colon V \to V/W'$ を標準全射とする. well-defined な写像 $\pi\colon V/W' \to V/W$, $p'(v) \mapsto p(v)$ が線形であることを示せ.

解答 6.1. 線形性: 任意の $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n;\mathbb{K})$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対して, $cA + dB = (ca_{ij} + db_{ij})$ だから $\mathrm{tr}(cA + dB) = \sum_{i=1}^{n}(ca_{ii} + db_{ii}) = c\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + d\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = c\,\mathrm{tr}(A) + d\,\mathrm{tr}(B)$.

全射性: 任意の $c \in \mathbb{K}$ に対して, $(1, 1)$ 成分が c で他の成分が 0 である行列 A を考えると $\mathrm{tr}(A) = c$.

解答 6.2. 線形性: 任意の $x, y \in W'$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対し $\iota(cx + dy) = 0 + (cx + dy) = cx + dy = c(0 + x)$ $+d(0 + y) = c\iota(x) + d\iota(y)$.

単射性: $x \in W'$ が $\iota(x) = 0$ を満たすなら $W + W' \subset V$ において $x + 0 = 0$, つまり $x = 0$. ι は線形写像だから, 単射性が従う.

解答 6.3. 任意の $\alpha, \beta \in V/W'$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対し, $\alpha = p'(v)$, $\beta = p'(w)$ なる $v, w \in V$ を取ると, 標準射影 $p' \colon V \to V/W'$ の線形性から $c\alpha + d\beta = p'(cv + dw)$ なので, $\pi(c\alpha + d\beta) = \pi(p'(cv + dw)) = p(cv + dw) \overset{(*)}{=} cp(v) + dp(w) = c\pi(\alpha) + d\pi(\beta)$. 但し $(*)$ では p の線形性を用いた.