§7.1. 準同型定理

(前回) 商空間の普遍性　　　線形空間/写像は体K上

- $V \supset W$: 線形空間と部分空間
- $p: V \to V/W$: 商空間への射影(標準的)
- $f: V \to V'$: 線形写像

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V' \\ V/W \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

"$\exists \bar{f}: V/W \to V'$ s.t. 線形かつ $\bar{f} \circ p = f$" $\Longleftrightarrow$ "$f(W) = \{0\}$"

更に、この時 $\bar{f}$は一意で、$\bar{f}(\bar{v}) = f(v)$　($\bar{v} \in V/W$, vは代表元)

$\bar{f}$: fが誘導する線形写像

Cor. $f: V \to V'$: 線形写像

$$\bar{f}: V/(\mathrm{Ker} f) \longrightarrow V' : \bar{v} \mapsto f(v)$$

は well-defined な線形写像で $\bar{f} \circ p = f$.　($p: V \to V/\mathrm{Ker} f$: 標準射影)

Pf. $\mathrm{Ker} f \subset V$ は $f(\mathrm{Ker} f) = \{0\}$ をみたす。 $\square$

Thm. (線形代数における準同型定理 = 第一同型定理)
7.1.1.

$f: V \to V'$: 線形写像.　$\bar{f}: V/\mathrm{Ker} f \to V' : \bar{v} \mapsto f(v)$

$\bar{f}$は次の同型写像を定める。

$$\bar{f}: V/\mathrm{Ker} f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f, \quad \bar{v} \mapsto \bar{f}(\bar{v}) = f(v)$$

Pf. $\bar{f}$が単射 かつ $\mathrm{Im} \bar{f} = \mathrm{Im} f$ を示す.

(単射) $V/W \ni \bar{v}$, $\bar{f}(\bar{v}) = 0$ とする. $\bar{v}$の代表元$v \in V$について

$\bar{f}(\bar{v}) = f(v) = 0$　$\therefore v \in \mathrm{Ker} f$　$\therefore \bar{v} = 0 \in V/W$

(後半)
$$\begin{aligned} \mathrm{Im} \bar{f} &= \{\bar{f}(\bar{v}) \in V' \mid \bar{v} \in V/W\} \\ &= \{f(v) \in V' \mid \text{〃}, v \in \bar{v}\} \\ &= \{f(v) \in V' \mid v \in V\} = \mathrm{Im} f \end{aligned}$$ $\square$

Cor. $\dim V < \infty$ なら $\dim V = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$
(5.2.3)

Pf. $\dim(V/\mathrm{Ker} f) = \dim V - \dim(\mathrm{Ker} f)$　(Cor. 6.1.7)

と $\dim(V/\mathrm{Ker} f) = \dim \mathrm{Im} f$ より $\square$

Rmk.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V' \\ V/\mathrm{Ker} f \arrow[r, "\sim"] \arrow[ur, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}\bar{f} = \mathrm{Im} f \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

E.g. 7.1.3. $M(n;\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \mid a_{ij} \in \mathbb{K}\}$: n次正方行列の線形空間

$\mathrm{tr} : M(n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\quad A \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

は線形写像 (演習7.1)

$\mathfrak{sl}(n;\mathbb{K}) := \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$

$= \{A \in M(n;\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr} A = 0\}.$

trは全射なので (演習7.1), Aの商空間における同値類

$\overline{\mathrm{tr}} : M(n;\mathbb{K})/\mathfrak{sl}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K},\quad \bar{A} \mapsto \mathrm{tr} A$

$\dim \mathfrak{sl}(n;\mathbb{K}) = \dim M(n;\mathbb{K}) - \dim \mathbb{K}$

$= n^2 - 1.$

Cor. 7.1.4 (線形代数における第二同型定理)

V: 線形空間, $W, W' \subset V$: 部分空間

写像 $W' \xrightarrow{\iota} W + W',\ w' \mapsto 0 + w' = w'$ から

線形写像 $W'/(W \cap W') \to (W+W')/W$ が定まり, 同型 □

Prf. ι は単射線形 (演習7.2)

$\varphi : W' \xrightarrow{\iota} W + W' \xrightarrow{\text{射影}} (W+W')/W,\quad w' \mapsto w' \mapsto \overline{w'}$

は線形写像の合成なので線形

φは全射: $(W+W')/W \ni {}^{\forall}\alpha\quad {}^{\exists}u \in W+W',\ \alpha = \bar{u}$

$u = w + w',\quad {}^{\exists}(w, w') \in W \times W'$

$u - w' = w \in W \quad \therefore u \underset{W}{\sim} w' \quad \therefore \bar{u} = \overline{w'} \quad \therefore \alpha = \varphi(w')$

$\therefore\ \bar{\varphi} : W'/\mathrm{Ker}\varphi \xrightarrow{\sim} (W+W')/W,\quad \overline{w'} \mapsto \overline{w'}$

$\mathrm{ker}\varphi = \{w' \in W' \mid \overline{w'} = 0\} = \{w' \in W' \mid w' \in W\} = W \cap W'$ □

Cor. (第三同型定理)
7.1.5 $V \supset W \supset W'$: 線形空間と部分空間の列
$p: V \to V/W$, $p': V \to V/W'$: 射影
(1) $\pi: V/W' \longrightarrow V/W$, $\alpha = p'(v) \longmapsto p(v)$ ($\alpha \in V/W'$, $v \in \alpha$: 代表元)
は well-defined, 線形
(2) π が誘導する線形写像元は次の同型写像.
$\bar{\pi}: (V/W')/(W/W') \xrightarrow{\sim} V/W$, $\bar{\alpha} = \overline{p'(v)} \longmapsto p(v)$ (α, v: 同上)

Pf. (1) well-defined: $p'(v) = p'(v')$, $v, v' \in V$ と仮定
$v \underset{W'}{\sim} v'$. $\therefore v - v' \in W' \subset W$ $\therefore v \underset{W}{\sim} v'$ $\therefore p(v) = p(v')$
線形: 演習7.3
(2) $\bar{\pi}: (V/W')/\mathrm{Ker}\,\pi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\,\pi$, $\overline{p'(v)} \longmapsto \pi(p'(v)) = p(v)$
よって π: 全射 と $\mathrm{Ker}\,\pi = W/W'$ を示せば良い.
(全射) $V/W \ni \forall \alpha$. $\exists v \in V$, $\alpha = p(v)$
$p'(v) \in V/W'$ は $\pi(p'(v)) = p(v) = \alpha$ をみたす.
(後半) $\mathrm{Ker}\,\pi = \{\alpha \in V/W' \mid p(v) = 0\ (v \in \alpha: 代表元)\}$
$= \{p'(v) \in V/W' \mid v \in W\}$
$= W/W'$ □

§復習 (§5.4, §7.2)

- 線形空間の定ギ 1.2.1.
  線形写像 (1.4.1), 同型写像 (1.4.7, 3.3.1)
  部分空間の定ギ 2.1.1
  〃 和 (2.2.3)

- 基底の定ギ 2.4.1
  〃 存在定理 2.4.11, 延長定理 2.4.15
  次元の定ギ 2.5.2.
  部分空間の和の次元公式 2.5.8

- 行列表示の定ギ 3.4.2
  基底変換行列 3.5.2, 行列表示の変換 3.5.7

- 直積 (4.1.2) と直和 (4.1.7)
  部分空間の直和 (4.2.5), 補空間 (4.2.8)

- 核と像 (5.1.2)
  線形写像の標準形 (5.2.1)

- 商空間 (§6.1)
  普遍性
  準同型定理