現代数学基礎 BI　5 月 23 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題. U, V, W を有限次元線形空間とし, $f\colon U \to V$ と $g\colon V \to W$ を線形写像であって, 三条件
(i) f は単射　(ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$　(iii) g は全射
を全て満たすものとする. このとき, 次の等式が成立することを示せ.

$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

解答. 有限次元線形空間の間の任意の線形写像 $f\colon U \to V$ について $\dim U = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$ が成立する (講義ノートの系 5.2.3). また f が単射なら $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ (命題 5.1.5 (1)) なので $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ であり, f が全射なら $\operatorname{Im} f = V$ (命題 5.1.5 (2)) なので $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$ である. 従って, 条件 (i) と (iii) より

$$\dim U = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) \overset{\text{(i)}}{=} 0 + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im} f),$$
$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Im} g) \overset{\text{(iii)}}{=} \dim(\operatorname{Ker} g) + \dim W.$$

条件 (ii) より $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} g)$ なので

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim W = \dim U + \dim W.$$

コメント. 議論に大きなギャップや間違えがあればそれ毎に 1 点減点とし, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.8 点でした.

上の解答でも用いていますが, 多くの人が答案で使っていた 2 つの事実

- f が単射であることと $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ が同値
- $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

の証明は自力でできるようにしておいて下さい.

以上です.