

現代数学基礎 BI 5月23日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html>

問題 6.1 (講義ノート定理 6.1.2 の一部). 商空間 V/W のスカラー倍 $c\bar{v} = \overline{cv}$ ($c \in \mathbb{K}$, $\bar{v} \in V/W$, $v \in \bar{v}$ は代表元) が well-defined であることを示せ.

問題 6.2 (講義ノート定理 6.1.7). $V \supset W$ を有限次元線形空間とその部分空間とし, v_1, \dots, v_m は W の基底で, $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ はそれを延長した V の基底だとする. このとき $\overline{v_{m+1}}, \dots, \overline{v_n}$ が V/W の基底であることを示せ.

問題 6.3 (講義ノート定理 6.2.1 の一部). $p: V \rightarrow V/W$ を線形空間 V から商空間 V/W への標準全射とし, また $f: V \rightarrow V'$ を $f(W) = \{0\}$ を満たす線形写像とする. このとき $\bar{f}: V/W \rightarrow V'$, $\bar{f}(\bar{v}) := f(v)$ ($\bar{v} \in V/W$, $v \in \bar{v}$ はその代表元) は well-defined であるが, それが線形写像であることを示せ.

問題 6.4 (講義ノート系 6.2.3 の後半; 問題 6.2.2). $\bar{f} \in \text{Hom}(V/W, V'/W')$ が $\bar{f}(\bar{v}) = \overline{f(v)}$ ($\bar{v} \in V/W$, $v \in \bar{v}$ はその代表元) を満たすことを示せ.

問題 6.5. 講義ノート補題 6.2.4 を示せ.

解答は講義ノート該当箇所を参照せよ.