§6.1. 商空間

Lem 6.1.1. $V \supset W$: 線形空間と部分空間. V上の二項関係 $\underset{W}{\sim}$

$$u, v \in V \quad u \underset{W}{\sim} v :\Longleftrightarrow u - v \in W$$

は同値関係.

Prf. (反射律) $\forall v \in V$, $v - v = 0 \in W$ より $v \underset{W}{\sim} v$

$W \subset V$は部分空間

(対称律) $\forall u, v \in V$ $u \underset{W}{\sim} v$ なら $v - u = -(u - v) \in W$ より $v \underset{W}{\sim} u$

(推移律) $\forall u, v, w \in V$ $u \underset{W}{\sim} v$ かつ $v \underset{W}{\sim} w$ なら $u - w = (u - v) + (v - w) \in W$ より $u \underset{W}{\sim} w$. □

・商集合を $V/W := V/\underset{W}{\sim}$, $v \in V$の$\underset{W}{\sim}$に関する同値類を $\overline{v} \in V/W$と書く.

写像 $p : V \longrightarrow V/W$, $v \longmapsto \overline{v}$ は全射

☆ $\forall \alpha \in V/W$ $\exists v \in V$ $\alpha = \overline{v}$ αに対してvは一意でない.

Thm 6.1.2. V/W は次の線形空間の構造を持つ:

・ $\overline{u} + \overline{v} := \overline{u + v}$ $\quad (\overline{u}, \overline{v} \in V/W)$

・ $c \cdot \overline{v} := \overline{cv}$ $\quad (c \in \mathbb{K}, \overline{v} \in V/W)$

・ $0_{V/W} := \overline{0_V}$

Rmk 6.1.3. 和 $\overline{u} + \overline{v}$ の定義は

1. 同値類 $\overline{u} = \{u' \in V \mid u' \underset{W}{\sim} u\}$ の代表元 $u \in \overline{u}$ を選ぶ.
2. 〃 $\overline{v} = \{v' \in V \mid v' \underset{W}{\sim} v\}$ 〃 $v \in \overline{v}$ 〃
3. 選んだ代表元から $u + v \in V$が定まる. その同値類 $\overline{u+v} \in V/W$

と定めている. つまり $\overline{u} + \overline{v}$ は $\overline{u}, \overline{v} \in V/W$以外のデータを用いている...

+が V/W上の二項演算である為には、well-definedであること、

つまり 他の代表元 $u' \in \overline{u}$, $v' \in \overline{v}$を選んでも

$\overline{u + v} = \overline{u' + v'} \in V/W$ となるべき.

Thm.のPf: ①和がwell-defined ②スカラー倍がwell-defined ③線形空間の公理.

①だけ示す. (② は演習6.1)

$u, u', v, v' \in V$, $u \underset{W}{\sim} u'$ かつ $v \underset{W}{\sim} v'$ なら $\overline{u}+\overline{v}=\overline{u'}+\overline{v'}$ (※)を示す

(※) $\iff \overline{u+v}=\overline{u'+v'} \in V/W$

Wは部分空間

$\iff u+v \underset{W}{\sim} u'+v'$

$\iff (u+v)-(u'+v') \in W$ だが, $(u+v)-(u'+v')=\underset{W}{(u-u')}+\underset{W}{(v-v')}\in W$ □

Dfn. 6.1.4. Thm.の線形空間V/Wを商空間という. □

Prp. 6.1.5. $V \supset W$ は同上. $p: V \to V/W$, $v \mapsto \overline{v}$ は全射線形で $\mathrm{Ker}\, p = W$
pを標準全射と呼ぶ. □

Pf. 全射性は既に説明した.

$V \ni \forall u, v$, $p(u+v)=\overline{u+v}=\overline{u}+\overline{v}=p(u)+p(v)$

$\mathbb{K} \ni \forall c$, $p(cu)=\overline{cu}=c\cdot\overline{u}=c\cdot p(u)$ よりpは線形

$\mathrm{Ker}\, p=\{v\in V \mid p(v)=0\}=\{v\in V \mid \overline{v}=\overline{0_V}\}=\{v\in V \mid v \underset{W}{\sim} 0_V\}=\{v\in V \mid v-0\in W\}=W$ □

Lem. 6.1.6. $V \supset W$, $p: V \to V/W$ は同上. $U \subset V$ がWの補空間なら $p|_U: U \to V/W$ は同型

← $V = U \oplus W$

Pf. pは線形なので, 全単射であることを示せば良い

(全射) $\forall \overline{v} \in V/W$ の代表元 $v \in V$ を $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$ と書く.

$\overline{v}=p(u+w)=p(u)+p(w)=p(u)+0=p(u)$ $\therefore \mathrm{Im}\, p|_U = V/W$

(単射) $u, u' \in U$, $p(u)=p(u')$ なら $\overline{u}=\overline{u'} \iff u \underset{W}{\sim} u' \iff u-u' \in W \cap U$

$U \cap W = \{0\}$ より $u - u' = 0$ □

証明は演習6.2　Vは有限次元　延長して得られる

Cor. 6.1.7. $V \supset W$ 同上, $\dim V < \infty$. $v_1, \dots, v_m$: Wの基底, $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$: Vの基底.
この時 $\overline{v_{m+1}}, \dots, \overline{v_n}$ はV/Wの基底. 特に $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$. □

§6.2. 商空間の普遍性

Thm. 6.2.1. $V \supset W$：同上. $p: V \to V/W$：標準全射, $f: V \to V'$：線形

(i) $f(W)=\{0\}$

$\Longleftrightarrow$ (ii) $\exists \bar{f}: V/W \to V'$, 線形, $\bar{f}\circ p = f$

この条件の下, (ii)の$\bar{f}$は一意に定まる. (fが誘導する線形写像)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V' \\ V/W \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Prf. (i) $\Rightarrow$ (ii)

$V/W \ni \bar{v}$ の代表元 v を取って $\bar{f}(\bar{v}) := f(v) \in V'$ と定める.

well-defined： 他の代表元 $v' \in \bar{v}$ について $f(v)=f(v')$ を示す.

$v \underset{W}{\sim} v'$ より $v-v' \in W$ なので $f(v-v')=0$

$\therefore f(v) = f(v-v'+v') = f(v-v')+f(v') = 0+f(v') = f(v')$

$\bar{f}\circ p = f$： $\forall v \in V \quad (\bar{f}\circ p)(v) = \bar{f}(\bar{v}) = f(v)$

$\bar{f}$ が線形： 演習6.3

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$\mathrm{Ker}\, p = W$ より $\forall w \in W \quad p(w)=0$. $\therefore f(w) = \bar{f}\circ p(w) = \bar{f}(0) = 0$

$\bar{f}$ の一意性

"$g \in \mathrm{Hom}(V/W, V')$, $g\circ p = f$ なら $g=\bar{f}$" を示す.

$\forall \bar{v} \in V/W$, $v \in \bar{v}$：代表元 とすると $p(v)=\bar{v}$

$\therefore g(\bar{v}) = (g\circ p)(v) = f(v) = (\bar{f}\circ p)(v) = \bar{f}(\bar{v})$ □

Cor. 6.2.3. $V \supset W$, $p: V \to V/W$：同上. $V' \supset W'$, $p': V' \to V'/W'$：もう一組.

$f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ が $f(W) \subset W'$ をみたすなら

右の図式を可換にする $\bar{f} \in \mathrm{Hom}(V/W, V'/W')$ が一意に存在する.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V' \arrow[d, "p'"] \\ V/W \arrow[r, dotted, "\bar{f}"'] & V'/W' \end{tikzcd}$$

Prf. $\mathrm{Ker}\, p' = W'$ より $p'\circ f \in \mathrm{Hom}(V, V'/W')$ は

$(p'\circ f)(W) = p'(f(W)) \subset p'(W') = \{0\}$

より Thm.6.2.1. の条件(i)をみたす. $\therefore \exists!\ \bar{f} \in \mathrm{Hom}(V/W, V'/W')$

一意存在　$\bar{f}\circ p = p'\circ f$ □

演習6.4 Cor.の$\bar{f}$が $\bar{f}(\bar{v}) = \overline{f(v)} \in V/W$ をみたすことを示せ.
(問6.2.2) ($\bar{v} \in V/W$, vはその代表元) □

Lem. 6.2.4. $V \supset W$, $V' \supset W'$: 同上. $\dim V, \dim V' < \infty$.
$v_1, \dots, v_l$: Wの基底, $v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_n$: Vの基底
$v_1', \dots, v_k'$: W' 〃 $v_1', \dots, v_k', v_{k+1}', \dots, v_m'$: V' 〃
$f \in \mathrm{Hom}(V, V')$の行列表示をブロック分けして

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} k \\ m-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \;\; l & \quad n-l \end{array} & \end{array} \in M(m, n; K)$$

(1) (Cor.6.2.3の)条件 $f(W) \subset W' \Leftrightarrow A_{21} = O$
以下,この条件を仮定.
(2) $f|_W \in \mathrm{Hom}(W, W')$の行列表示は$A_{11}$
(3) Cor.6.1.7より $\bar{v}_{l+1}, \dots, \bar{v}_n$はV/Wの, $\bar{v}'_{k+1}, \dots, \bar{v}'_m$はV'/W'の基底.
Cor.6.2.3より $\exists \bar{f} \in \mathrm{Hom}(V/W, V'/W')$
その行列表示はA_{22}.

Prf: 演習6.5 □