現代数学基礎 BI　5 月 16 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. n を正整数とする．二変数 x,y の実係数多項式がなす線形空間 $\mathbb{R}[x,y]$ について, 単項式 $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots, xy^{n-1}, y^n$ が生成する部分空間を $V(n) \subset \mathbb{R}[x,y]$ と書く．そして三つの写像 $E,F,H\colon\ \mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{R}[x,y]$ を, 多項式 $f \in \mathbb{R}[x,y]$ に対して

$$E(f) \coloneqq y\frac{\partial f}{\partial x}, \quad F(f) \coloneqq x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad H(f) \coloneqq -x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

で定義する．但し $\frac{\partial}{\partial x}$ は x に関する微分を, $\frac{\partial}{\partial y}$ は y に関する微分を表す．

(1) 写像 E,F,H がどれも $V(n)$ の自己準同型になる事を示せ．

(2) $V(n)$ の基底 $y^n, xy^{n-1}, \ldots, x^{n-1}y, x^n$ に関する $E,F,H \in \operatorname{End}\bigl(V(n)\bigr)$ の行列表示をそれぞれ求めよ．

解答. (1) 微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 及び掛算写像 $x\cdot -, y\cdot -$ は $\mathbb{R}[x,y]$ の自己準同型だから, それらの合成 $E = (y\cdot -)\circ\frac{\partial}{\partial x}$, $F = (x\cdot -)\circ\frac{\partial}{\partial y}$, $H_1 \coloneqq (x\cdot -)\circ\frac{\partial}{\partial x}$, $H_2 \coloneqq (y\cdot -)\circ\frac{\partial}{\partial y}$ も $\mathbb{R}[x,y]$ の自己準同型であり, それらの線形結合 $H = -H_1 + H_2$ も $\mathbb{R}[x,y]$ の自己準同型である．あとは E,F,H それぞれによる $V(n)$ の像が $V(n)$ に含まれることを示せば $E,F,H \in \operatorname{End}\bigl(V(n)\bigr)$ が従うが, それを示すには $V(n)$ の基底 $x^i y^{n-i}$ $(i = 0,\ldots,n)$ の像が $V(n)$ に属すことを言えば十分．

$$E(x^i y^{n-i}) = i x^{i-1} y^{n-i+1}, \quad F(x^i y^{n-i}) = (n-i) x^{i+1} y^{n-i-1}, \quad H(x^i y^{n-i}) = (n-2i) x^i y^{n-i}$$

はどれも $V(n)$ の元だから, 主張が示せた．

(2) (2) の計算から, 行列表示は以下の $(n+1)$ 次正方行列になる．但し書いていない成分は全て 0.

$$\bigl(E(y^n)\ E(xy^{n-1})\ \cdots\ E(x^{n-1}y)\ E(x^n)\bigr) = \bigl(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\bigr)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bigl(F(y^n)\ F(xy^{n-1})\ \cdots\ F(x^{n-1}y)\ F(x^n)\bigr) = \bigl(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\bigr)\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ n & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 2 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bigl(H(y^n)\ H(xy^{n-1})\ \cdots\ H(x^{n-1}y)\ H(x^n)\bigr) = \bigl(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\bigr)\begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2-n & \\ & & & & -n \end{pmatrix}.$$

コメント. (1) は V への写像であることと準同型 (線形写像) であることにそれぞれ 1 点ずつ, (2) は 1 点で, 3 点満点で採点しました．平均点は 2.1 点でした．

(1) では示すべき二つのこと (V から V への写像であることと, 線形写像であること) のうち一方にしか言及していない人が多くいました．(2) では計算ができていても成分の並べ方が分かっていない人が多かったです．

前回の小テストで 2 次の特殊線形 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2)$ を扱いましたが, 今回の問題は微分作用素による $\mathfrak{sl}(2)$ の実現と, $\mathfrak{sl}(2)$ の既約表現を背景としています. 線形空間 $V(n)$ は $\mathfrak{sl}(2)$ の既約表現です. 更に任意の有限次元既約表現は, その次元を $n+1$ とすると, $V(n)$ と同型であることが知られています.

以上です.