現代数学基礎 BI　5 月 16 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題 5.1 (講義ノート問題 5.1.3, 線形写像に関する**固定点定理**)**.** V を有限次元線形空間とし, $n \coloneqq \dim V$ とする. また $f\colon V \to V$ は線形写像であって $f \circ f = f$ を満たすものとする. 写像 $g\colon V \to V$ を次で定める.

$$g(v) \coloneqq v - f(v) \quad (v \in V).$$

この時, 以下の主張が成立する事を示せ.

(1) g は線形写像であり, $\operatorname{Im} g$ は $\operatorname{Ker} f$ の部分空間である.

(2) $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

(3) 適当な整数 $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ と V の基底 $v_1, \dots, v_n$ が存在して

$$f(v_i) = \begin{cases} v_i & (i = 1, \dots, r) \\ 0 & (i = r+1, \dots, n) \end{cases}.$$

(4) f が零写像でなければ, $v \in V \setminus \{0\}$ が存在して $f(v) = v$ となることを示せ.

自己写像 $f\colon V \to V$ に対して, $f(v) = v$ となる $v \in V$ を f の固定点 (fixed point) と呼ぶ. (4) より, f が零写像でない線形写像なら, 零元でない f の固定点が存在する.

問題 5.2. 線形空間 V とその基底 $v_1, \dots, v_n$ および線形写像 $f\colon V \to W$ について, $f(v_1), \dots, f(v_n)$ が $\operatorname{Im} f$ を張ることを示せ.

問題 5.3. 線形写像 $f\colon V \to W$ に対し, 部分空間 $\operatorname{Ker} f \subset V$ の補空間を V' とする. この時 $f(\operatorname{Ker} f + V) = f(\operatorname{Ker} f) + f(V')$ が成立することを示せ.

解答 5.1. (1) 任意の $v, v' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して, f の線形性から $g(cv + c'v') = cv + c'v' - f(cv + c'v') = c(v - f(v)) + c'(v' - f(v')) = cg(v) + c'g(v')$ となり, g の線形性が示せた.

$\operatorname{Im} g \subset V$ は部分空間なので, 後半の主張を示すには集合としての包含関係 $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, つまり任意の $v \in V$ に対して $f(g(v)) = 0$ を示せば良いが, $f(g(v)) = f(v - f(v)) = f(v) - (f \circ f)(v) = f(v) - f(v) = 0$ となる.

(2) 任意の $v \in V$ は $v = (v - f(v)) + f(v) = g(v) + f(v)$ と書けるが, $f(v) \in \operatorname{Im} f$ であり, また (1) より $g(v) \in \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ だから $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ である.

また $w \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ とすると, $w \in \operatorname{Im} f$ より $w = f(v)$, $v \in V$ と書けるが, $w \in \operatorname{Ker} f$ より $0 = f(w) = (f \circ f)(v) = f(v) = w$ となり, $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ である.

以上より $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

(3) $r \coloneqq \operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f$ と置くと $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

$r = 0$ の場合は $f = 0$ (零写像) なので, V の任意の基底 $v_1, \ldots, v_n$ を取れば $f(v_i) = 0$ となって主張が成立する.

$r > 0$ の場合は $\operatorname{Im} f$ の基底 $v_1, \ldots, v_r$ を取り, 延長して得られる V の基底を $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ とする. この時, $i = 1, \ldots, r$ に対しては $v_i = f(w_i)$, $w_i \in V$ と書けるから, $f(v_i) = (f \circ f)(w_i) = f(w_i) = v_i$ となる. また $i = r+1, \ldots, n$ に対しては, (2) より $v_i \in \operatorname{Ker} f$ だから $f(v_i) = 0$ である.

(4) $f \neq 0$ より (3) の証明の $r = \operatorname{rank} f > 0$. よって (3) より $v_1 \in V \setminus \{0\}$ が存在して $f(v_1) = v_1$.

解答 5.2. 略.

解答 5.3. 略.