§4.2 つづき

Prp. 4.2.5 $V \supset W_i \ (i \in I)$: 線形空間と部分空間の族

(i) $\sum_{i \in I} W_i \subset V$ の元を W_i の元の和で書く方法は一意.

$\Leftrightarrow$ (ii) $\forall i \in I$. $W_i \cap \left(\sum_{j \in I \setminus \{i\}} W_j\right) = \{0\}$

この条件の下, $\varphi : \bigoplus_{i \in I} W_i \to \sum_{i \in I} W_i$, $(w_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} w_i$ は同型写像 □

Pf. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) は前回の $I = \{1,2\}$ の場合と同様.

条件を仮定. 写像 φ が確かに定義されていること, 線形性は略.

$\psi : \sum_{i \in I} W_i \to \bigoplus_{i \in I} W_i$ を以下のように定める:

(i)より $\sum_{i \in I} W_i \ni \forall w = \sum_{i \in I} w_i$, $\exists! \, w_i \in W_i \ (i \in I)$

$\sum_{i \in I} W_i$ の定義より有限個の $i \in I$ を除いて $w_i = 0$ だから, $(w_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} W_i$

$\psi(w) := (w_i)_{i \in I}$ とする.

ψ は φ の逆写像. □

Dfn. 4.2.6. Prp の条件が成立する時, $\bigoplus_{i \in I} W_i$ と $\sum_{i \in I} W_i \subset V$ を同一視して

$$\bigoplus_{i \in I} W_i := \sum_{i \in I} W_i$$

更に $V = \bigoplus_{i \in I} W_i$ の時, これを V の直和分解という. □

Rmk. 前回の $W_1 \dotplus W_2$ は $W_1 \oplus W_2$

Cor. $\forall W \subset V$ 部分空間 $\exists W' \subset V$ 部分空間 $V = W \oplus W'$

W': Wの補空間

§4.3は6月以降

§5.1. 核と像

Prp./Dfn. 5.1.1, 5.1.2 $f : V \to W$:線形写像

(1) $\forall$部分空間 $V' \subset V$, $f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\} \subset W$ は部分空間

$\mathrm{Im} f := f(V)$: fの像

(2) $\forall$部分空間 $W' \subset W$. $f^{-1}(W') := \{v \mid f(v) \in W'\} \subset V$ 〃

$\mathrm{Ker} f := f^{-1}(0)$: fの核

← $f^{-1}(\{0_V\})$ のこと

$\dim W < \infty$ の場合. $\mathrm{rank}\, f := \dim(\mathrm{Im} f)$ □

Cor. $f|_{\mathrm{Ker} f} : \mathrm{Ker} f \to W$ は零写像. $f : V \to \mathrm{Im} f$ は全射線形 □

Exm. 5.1.3. $A \in M(m, n ; \mathbb{K})$ $\quad l_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $v \mapsto Av$ 左A倍写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\, l_A &= \{v \in \mathbb{K}^n \mid l_A(v) = 0\} \\
&= \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\} : \text{連立方程式 } Av=0 \text{ の解空間} \\
\mathrm{Im}\, l_A &= \{Av \in \mathbb{K}^m \mid v \in \mathbb{K}^n\} \\
&= \{\textstyle\sum_{i=1}^n a_i v_i \in \mathbb{K}^m \mid v_i \in \mathbb{K}\} \qquad A = (a_1 \cdots a_n)\ a_i \in \mathbb{K}^m \\
&= \langle a_1, \dots, a_n \rangle : \text{Aの列ベクトルが張る部分空間} \\
(&= \textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{K} a_i \subset \mathbb{K}^m)
\end{aligned}$$

□

Prp. 5.1.5 $f : V \to W$:線形写像

(1) fは単射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{0\}$

(2) fは全射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im} f = W$

(3) fは同型 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ かつ $\mathrm{Im} f = W$

Prf. (1)は前2回の演習問題. (2)は全射の定義. (3)は(1)と(2) □

§5.2 線形写像の標準形

Thm. 5.2.1. V, W：有限次元．$\dim V =: n$，$\dim W =: m$，$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$

(i) $\mathrm{rank}\, f = r$

$\Longleftrightarrow$ (ii) $\exists (v_1, \dots, v_n)$：$V$の基底 $\exists (w_1, \dots, w_m)$：$W$の基底

$$\text{s.t.}\quad f(v_i) = \begin{cases} w_i & (i \leq r) \\ 0 & (i > r) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ (iii) $\exists V, W$の基底 s.t. fの行列表示が

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & O \\ O & O \end{array}\right] \end{array}$$

w_i達は $\mathrm{Im}\, f$ の基底．
$\therefore \mathrm{rank}\, f = \dim(\mathrm{Im}\, f) = r$

Pf. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は行列表示の定義． 問5.2

(ii) $\Rightarrow$ (i)　$\mathrm{Im}\, f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$

(i) $\Rightarrow$ (ii)　$V = \mathrm{Ker}\, f \oplus V'$　V'：$\mathrm{Ker}\, f \subset V$の補空間

$f : V \twoheadrightarrow \mathrm{Im}\, f$ の制限 $f|_{V'} : V' \to \mathrm{Im}\, f$ は同型写像

(線形) 部分空間への制限なので　問5.3

(全射) $\mathrm{Im}\, f = f(V) = f(\mathrm{Ker}\, f + V') = f(\mathrm{Ker}\, f) + f(V') = \{0\} + f(V') = f(V')$

(単射) $\mathrm{Ker}\, f|_{V'} = \{v \in V' \mid f(v) = 0\} = V' \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$

$\therefore \dim V' = \dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{rank}\, f = r$，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - r$

$(v_1, \dots, v_r)$：V'の基底．$(v_{r+1}, \dots, v_n)$：$\mathrm{Ker}\, f$の基底

$\Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$：$V$の基底．

$1 \leq i \leq r$ に対して $w_i := f(v_i) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f|_{V'}$

$f|_{V'}$は同型だから，$w_1, \dots, w_r$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底．

$\mathrm{Im}\, f \subset W$ に延長して $(w_1, \dots, w_m)$：Wの基底．　□

Cor. 5.2.3. V, W：有限次元，$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$$
$$= \quad 〃 \quad + \mathrm{rank}\, f$$
□

Cor. 5.2.5 V, W; 有限次元. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ $\quad \mathrm{rank}\, f = f$の行列表示の階数.

← 基底は任意.

Pf. Thm.の基底については. 行列表示は $A = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$. その階数 $= r = \mathrm{rank}\, f$.

一般の 〃 , 基底変換行列 P, Q で $Q^{-1}AP$.

PとQは正則だから $Q^{-1}AP$の階数 $= A$の階数 $= \mathrm{rank}\, f$. $\square$

行列の階数は基本変形で不変

正則行列は基本変形行列の積

問5.1 (講義ノート問5.1.3)

V: 有限次元. $n := \dim V$.

$f \in \mathrm{End}(V)$, $f \circ f = f$

$g : V \to V$, $v \mapsto v - f(v)$

(1) $g \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$, 部分空間

(2) $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$

(3) $\exists r \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\exists V$の基底 $v_1, \dots, v_n$

s.t. $f(v_i) = \begin{cases} v_i & (i \leq r) \\ 0 & (i > r) \end{cases}$ ← $r=0$の場合はなし

(4) fが零写像でなければ $\exists v \in V \setminus \{0\}$ $f(v) = v$

[線形写像に関する固定点定理]