現代数学基礎 BI　5 月 09 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題 4.1 (講義ノート補題 3.5.1)**.** 有限次元線形空間 V 上の自己同型 (可逆な自己準同型) f について, V の任意の基底に関する f の行列表示が正則行列であることを示せ.

問題 4.2 (講義ノート命題 4.1.12)**.** 線形写像 $f_i \in \mathrm{Hom}(V_i, W_i)$ $(i \in I)$ の直和 $\bigoplus_{i\in I} f_i$ とは, 線形写像の直積 $\prod_{i\in I} f_i \in \mathrm{Hom}(\prod_{i\in I} V_i, \prod_{i\in I} W_i)$ の部分空間 $\bigoplus_{i\in I} V_i \subset \prod_{i\in I} V_i$ への制限 $\bigoplus_{i\in I} f_i \coloneqq \prod_{i\in I} f_i|_{\bigoplus_{i\in I} V_i}$ のことである. これが $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} V_i, \bigoplus_{i\in I} W_i)$ の元であることを示せ.

問題 4.3 (講義ノート命題 4.2.1)**.** 線形空間 V とその部分空間 W_1, W_2 に対し, 写像 $\varphi\colon W_1 \oplus W_2 \to W_1 + W_2$ を $\varphi((w_1, w_2)) \coloneqq w_1 + w_2$ $(w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2)$ で定義する. φ が線形かつ全射であることを示せ.

問題 4.4 (講義ノート命題 4.2.7)**.** V を線形空間, $W \subset V$ を部分空間とする. また $\{v_j \mid j \in J\}$ を W の基底とし, それを延長して得られる V の基底を $\{v_i \mid i \in I\}$, $I \supset J$ とする. $W' \subset V$ を $\{v_i \mid i \in I \setminus J\}$ が生成する部分空間とすると, $W \cap W' = \{0\}$ かつ $W + W' = V$ となることを示せ.

問題 4.5 (講義ノート問題 1.4.3)**.** 線形空間 V とその部分空間 W_1, W_2, W_3 であって, $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_3 \cap W_1 = \{0\}$ であるが, 部分空間の和 $W_1 + W_2 + W_3$ が直和 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と同型ではないものを挙げよ.

問題 4.6 (前回の演習問題 3.6 の続き)**.** 体 $\mathbb{K}$ 上の四次元線形空間 $V = \mathbb{K}[x]_{\le 3} \coloneqq \{f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 \mid f_i \in \mathbb{K}\}$ とその上の自己準同型 $D \in \mathrm{End}(V)$, $D(f) \coloneqq f_1 + 2f_2 x + 3f_3 x^2$ について, V の (順序付き) 基底 $B \coloneqq (1, x, x^2, x^3)$ に関する行列表示 $D_B \in M(4; \mathbb{K})$ と $B' \coloneqq (1, x, x(x+1), x(x+1)(x+2))$ に関する行列表示 $D_{B'} \in M(4; \mathbb{K})$ は以下のようになる.

$$D_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad D_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 3 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

(1) B から B' への基底変換行列 $P \in M(4; \mathbb{K})$ を求めよ.
(2) $D_{B'} = P^{-1} D_B P$ となることを確認せよ.

解答 4.1. f の逆写像 f^{-1} は線形写像で $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$. 与えられている V の基底に関する f の行列表示を A, f^{-1} の行列表示を B とすると $AB = BA = I_N$ (単位行列, $N \coloneqq \dim V$). よって A は正則行列.

解答 4.2. 線形写像 $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ の部分空間 $V' \subset V$ への制限 $f|_{V'} : V' \to W$ は線形写像である (講義ノート補題 3.2.9). 従って $\bigoplus_{i \in I} f_i \colon \bigoplus_{i \in I} V_i \to \prod_{i \in I} W_i$ は線形写像. あとは像 $\mathrm{Im} \bigoplus_{i \in I} f_i \subset \prod_{i \in I} W_i$ が $\bigoplus_{i \in I} W_i$ に含まれることを示せば良いが, 任意の $v \in \bigoplus_{i \in I} V_i$ は, 適当な有限部分集合 $J \subset I$ を用いて

$$v = (v_i)_{i \in I}, \quad v_i \in V_i \ (i \in I), \quad v_i = 0_{V_i} \ (i \notin J)$$

と書けるから,

$$\bigl(\textstyle\bigoplus_{i \in I} f\bigr)(v) = \bigl(f_i(v_i)\bigr), \quad f_i(v_i) = f_i(0_{V_i}) = 0_{W_i} \ (i \notin J),$$

つまり $\bigl(\bigoplus_{i \in I} f\bigr)(v) \in \bigoplus_{i \in I} W_i$ である.

解答 4.3. 講義ノート命題 4.2.1 証明の最初の段落を参照.

解答 4.4. 前半: 任意の $w \in W \cap W'$ は, $w \in W$ から $w = \sum_{j \in J} c_j v_j$, $c_j \in \mathbb{K}$, 有限個の $j \in J$ を除いて $c_j = 0$ と書けて, また $w \in W'$ より $w = \sum_{i \in I \setminus J} c_i v_i$, $c_i \in \mathbb{K}$, 有限個の $i \in I \setminus J$ を除いて $c_i = 0$ と書ける. よって $\sum_{j \in J} c_j v_j = \sum_{i \in I \setminus J} c_i v_i$. v_i 達 $(i \in I = J \sqcup (I \setminus J))$ は線形独立だから, 全ての $i \in I$ に対して $c_i = 0$. よって $w = 0$.

後半: $W + W'$ は $\{v_j \mid j \in J\} \cup \{v_i \mid i \in I \setminus J\} = \{v_i \mid i \in I\}$ が生成する V の部分空間で, $\{v_i \mid i \in I\}$ は V の基底だから $W + W' = V$ である.

解答 4.5. 多項式空間 $V = \mathbb{K}[x]$ と部分空間 $W_1 = \mathbb{K}x$, $W_2 = \mathbb{K}x^2$, $W_3 = \mathbb{K}(x + x^2)$ を考えると, $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_3 \cap W_1 = \{0\}$. また $W_3 \subset W_1 + W_2$ より $W_1 + W_2 + W_3 = W_1 + W_2$ で, 特に $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = \dim(W_1 + W_2) = 2$. 一方で $\dim(W_1 \oplus W_2 \oplus W_3) = \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 = 3$ なので $W_1 + W_2 + W_3 \not\cong W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

解答 4.6. (1) $B' = BP$ に沿って計算すると

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x(x+1) & x(x+1)(x+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

(2) P は上三角行列で対角成分が全て 1 だから, 正則行列である (基底変換行列は必ず正則). よって $PD_{B'} = D_B P$ を示せば十分だが,

$$PD_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 6 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = DB_P.$$