# §3.5 基底変換

線形空間・写像は体$\mathbb{K}$上

**前回** $V, W$：有限次元線形空間，
$\{v_i\}_{i=1}^n \subset V$，$\{w_i\}_{i=1}^m \subset W$：基底
$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$，　$(f(v_1), \dots, f(v_n)) = (w_1, \dots, w_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
$A = (a_{ij}) \in M(m, n; \mathbb{K})$：$f$の行列表示

**Lem. 3.4.8. (2)** $V, W, X$：有限次元，$\{v_i\}_{i=1}^n, \{w_i\}_{i=1}^m, \{x_i\}_{i=1}^l$：$V, W, X$の基底
$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$，$A \in M(m, n; \mathbb{K})$：$f$の行列表示
$g \in \mathrm{Hom}(W, X)$，$B \in M(l, m; \mathbb{K})$：$g$　〃
$\Rightarrow$ $BA \in M(l, m; \mathbb{K})$は$g \circ f \in \mathrm{Hom}(V, X)$の　〃

**Pf.**

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_V", "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_W", "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "\varphi_X"', "\wr"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "l_A\ \text{左倍}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "l_B\ \text{左倍}"'] & \mathbb{K}^l \end{tikzcd}$$

$\varphi_V(v_i) = e_i$

より

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "\wr"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "l_B \circ l_A"'] & \mathbb{K}^l \end{tikzcd}$$

これと $l_B \circ l_A = l_{BA}$ より． □

**Lem. 3.5.1.** $V$：有限次元線形空間，$\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n \subset V$：基底，$\mathcal{B}' = \{v_i'\}_{i=1}^n \subset V$
$p \in \mathrm{Hom}(V, V)$，$p(v_i) = v_i'$ $(i = 1, \dots, n)$　(Prp 3.1.3. より $\exists ! p$)
このとき　$\mathcal{B}'$ が$V$の基底 $\Leftrightarrow$ $p$の $\mathcal{B}$ に関する行列表示$P$が正則

**Pf.** $P = (p_{ij}) \in M(n, n; \mathbb{K})$．　$p(v_j) = v_j' = \sum_{i=1}^n v_i p_{ij}$
$\{v_i'\}_{i=1}^n$が基底 $\Leftrightarrow$ $p$が可逆　(Lem. 3.3.13)
$\Leftrightarrow$ $\exists p^{-1} \in \mathrm{End}(V)$，$p^{-1} \circ p = p \circ p^{-1} = \mathrm{id}_V$
$\Leftrightarrow$ $\exists P' \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$　$P'P = PP' = I_n$
(∵ Lem. 3.4.8. (2))　　問4.1.

**Dfn. 3.5.2.** $B=\{v_i\}_{i=1}^n,\ B'=\{v_i'\}_{i=1}^n \subset V$：基底.
Lem.3.5.1. の正則行列 $P$ を $B$ から $B'$ への基底変換行列という $\square$

**Lem. 3.5.6.** 基底変換行列 $P$ は, $\mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}(V,V)$ の $B', B$ に関する行列表示と等しい.

**Pf.** $(\mathrm{id}_V)(v_j') = v_j' = \sum_i v_i p_{ij}$ より行列表示は $(p_{ij})=P$. $\square$

**Rmk.**

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\phi'"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[d, "\phi", "\wr"'] \\ K^n \arrow[r, "\sim", "\ell_P"'] & K^n \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} v_j' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & v_j' = \sum_i v_i p_{ij} \arrow[dr, mapsto] & & v_i \arrow[d, mapsto] \\ e_j \arrow[r, mapsto] & Pe_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} = & \sum_i e_i p_{ij} & e_i \end{tikzcd}$$

**Dfn.** $GL(n;K) := \{ M \in \mathrm{Mat}(n,n;K) \mid 正則 \}$ $\square$
general linear group 一般線形群.

**Thm. 3.5.7.** $V, W$：有限次元, $\dim V = n$, $\dim W = m$
$B_V, B_V'$：$V$ の基底, $P \in GL(n;K)$：$B_V$ から $B_V'$ への基底変換行列
$B_W, B_W'$：$W$ 〃, $Q \in GL(m;K)$：$B_W$ から $B_W'$ への 〃
$f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $A \in M(m,n;K)$：$B_V, B_W$ に関する $f$ の行列表示
このとき, $f$ の $B_V', B_W'$ に関する行列表示 $B = Q^{-1}AP$

**Pf.**

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\phi_V'"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_V"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\wr", "\phi_W"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[l, "\mathrm{id}_W"'] \arrow[d, "\wr"', "\phi_W'"] \\ K^n \arrow[r, "\sim", "\ell_P"'] & K^n \arrow[r, "\ell_A"'] & K^m & K^m \arrow[l, "\sim"', "\ell_Q"] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_V'"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\wr", "\phi_W'"'] \\ K^n \arrow[r, "\ell_B"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$(\ell_Q)^{-1} = \ell_{Q^{-1}}$

$\phi_V : v_i \mapsto e_i \quad B_V = \{v_i\}_{i=1}^n$ $\qquad$ $\phi_V' : v_i' \mapsto e_i \quad B_V' = \{v_i'\}_{i=1}^n$

$\phi_W : w_i \mapsto e_i \quad B_W = \{w_i\}_{i=1}^m$

$$\therefore\ \ell_B = \phi_W' \circ f \circ (\phi_V')^{-1} = \phi_W' \circ (\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V) \circ \phi_V'^{-1}$$
$$= \ell_{Q^{-1}} \circ \ell_A \circ \ell_P = \ell_{Q^{-1}AP} \qquad \square$$

## §4.1. 直積・直和

**Lem/Dfn.** 4.1.1,2,6,7 $V_i\ (i\in I)$：線形空間の族

- $\prod_{i\in I} V_i = \{(v_i)_{i\in I} \mid v_i \in V_i\}$ は以下の演算で線形空間.
  $(v_i)_{i\in I} + (v'_i)_{i\in I} := (v_i+v'_i)_{i\in I}$, $\quad c\cdot(v_i)_{i\in I} = (cv_i)_{i\in I}$
  ：直積
- $\bigoplus_{i\in I} V_i := \{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \mid$ 有限コの $i\in I$ を除いて $v_i=0\}$
  は $\prod_{i\in I} V_i$ の部分空間 ：直和 □

**Dfn.** 4.1.4,8

- $I=\{1,\dots,n\}$ ： $\prod_{i=1}^n V_i =: V_1\times\cdots\times V_n$
  $$\begin{array}{c}\prod_{i=1}^n V_i =: V_1\times\cdots\times V_n\\ \parallel \\ \bigoplus_{i=1}^n V_i =: V_1\oplus\cdots\oplus V_n\end{array}$$
- $V_i=V\ \forall i\in I$ ： $\prod_{i\in I} V =: V^I \supset \bigoplus_{i\in I} V = V^{\oplus I}$
  $I=\{1,\dots,n\}$ ； $V^n := V^{\{1,\dots,n\}} = V^{\oplus n} := V^{\oplus\{1,\dots,n\}}$ □

**Ex.** 4.1.5 数ベクトル空間 $K^n = \{v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \mid v_i\in K\}$ は $K$ の $n$ コ直積(直和) □

**Ex.** 4.1.9. 多項式空間 $K[x] = \{f=\sum_{i=0}^n f_i x^i \mid n\in \mathbb{N}, f_i\in K\} \cong K^{\oplus\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}$：$\mathbb{Z}_{\geq 0}$)

$f \mapsto (f_0,f_1,\dots,f_n,0,0,\dots)$

$\cap$ ✗

形式的級数空間 $K[[x]] = \{f=\sum_{i=0}^\infty f_i x^i \mid f_i\in K\} \cong K^{\mathbb{N}}$

$f \longmapsto (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$

**Prp./Dfn.** 4.1.12 $V_i, W_i$：線形空間 $f_i\in \mathrm{Hom}(V_i,W_i)\quad (i\in I)$

$\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} V_i \longrightarrow \prod_{i\in I} W_i$, $\quad (v_i)_i \longmapsto (f(v_i))_{i\in I}$

は線形写像 ：直積

$\bigoplus_{i\in I} f_i := \prod_{i\in I} f_i \big|_{\bigoplus_{i\in I} V_i}$

は $\bigoplus_{i\in I} V_i$ から $\bigoplus_{i\in I} W_i$ への線形写像 ：直和 □

⊂ 問4.2.

## §4.2. 部分空間の直和

**Prp 4.2.1.** $V \supset W_1, W_2$：線形空間と部分空間

$W_1 + W_2 \subset V$：部分空間の和

$W_1 \oplus W_2 = W_1 \times W_2$：線形空間の直和（=直積）

$\varphi \in \mathrm{Hom}(W_1 \oplus W_2, W_1 + W_2)$, $(w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2$,（線形：問4.5）

$\varphi$が同型写像 $\Leftrightarrow$ $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

**Prf.** $\varphi$は全射.（問4.3）

($\Rightarrow$) $\forall w \in W_1 \cap W_2$, $w = w + 0 = 0 + w = \varphi((w, 0)) = \varphi((0, w))$

$\varphi$は単射なので $(w, 0) = (0, w) \in W_1 \times W_2$. $\therefore$ $w = 0$

($\Leftarrow$) $\varphi$：単射を示す. $\varphi$は線形だから $\varphi((w_1, w_2)) = 0 \Rightarrow (w_1, w_2) = (0, 0)$

を示せば良い. $0 = \varphi((w_1, w_2)) = w_1 + w_2$

$\therefore$ $w_1 = -w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. $\therefore$ $w_1 = w_2 = 0$.

**Dfn** Prp.の条件が成立する時. $W_1 \dot{+} W_2 := W_1 + W_2 \subset V$. 部分空間の直和 □

**Prp 4.2.7.** $\forall W \subset V$：部分空間, $\exists W' \subset V$：部分空間, $V = W \dot{+} W'$

**Prf.** $\{v_j \mid j \in J\} \subset W$：基底

$\exists \{v_i \mid i \in I\} \subset V$：基底, $I \supset J$（基底延長定理 2.6.4）

$W' := \langle v_i \ (i \in I \setminus J) \rangle = \sum_{i \in I \setminus J} \mathbb{K} v_i \subset V$：部分空間

$W' \cap W = \{0\}$, $V = W + W'$ なので（問4.4）$V = W \dot{+} W'$ □

**Dfn.** $W'$：$W$の補空間 □