現代数学基礎 BI　4 月 25 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. 実開区間 $I := (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ 上の実数値函数全体がなす集合 $V := \{f \colon I \to \mathbb{R}\}$ は, 函数の和とスカラー倍

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (cf)(x) := c \cdot f(x) \quad (f, g \in V,\ c \in \mathbb{R})$$

に関して実線形空間である. また, 一次関数 x と対数函数 $\log(x)$, 及び三角関数 $\sin(x), \cos(x), \sin(2x)$ は V の元である.

(1) V の二元 x と $\log(x)$ が線形独立であることを示せ.

(2) V の三元 $\sin(x), \cos(x), \sin(2x)$ が線形独立か否か論じよ.

解答. V の零元 0_V は, 値が $0 \in \mathbb{R}$ の恒等関数である.

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ を係数とする一次結合 $ax + b\log(x)$ について, $ax + b\log(x) = 0_V$ は任意の $x \in I$ に対して $ax + b\log(x) = 0$ が成立することに他ならない. 特に $x = 1$ と $x = 2$ の場合を考えると $a \cdot 1 - b \cdot 0 = 0$ かつ $a \cdot 2 - b \cdot \log 2 = 0$ が成立する. この連立方程式を解くと $a = b = 0$. 従って $x, \log(x) \in V$ は線形独立.

(2) $a\sin(x) + b\cos(x) + c\sin(2x) = 0_V$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ だとすると, $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{4}$ の場合から $a \cdot 1 = 0$, $b \cdot (-1) = 0$, $a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + c = 0$. この連立方程式を解くと $a = b = c = 0$. 従って $\sin(x), \cos(x), \sin(2x) \in V$ は線形独立.

コメント. 線形独立の定義が分かっていれば 1 点, (1) と (2) それぞれで論証ができているかで 1 点ずつとして, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.5 点でした.

解答のように x に値を代入する方法が一番簡単ですが, 他に Wronskian を用いた回答もありました. 全体的に, 論証というには日本語が不十分な解答が多かったです.