現代数学基礎 BI　4 月 25 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題 3.1 (講義ノートの命題 3.2.6). 線形空間 V, W の間の線形写像全体がなす集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ が, 和 $(f+g)(v) := f(v) + g(w)$ とスカラー倍 $(cf)(v) := c.f(v)$ によって線形空間になることを示せ.

問題 3.2 (講義ノートの命題 3.1.3, 3.3.12). 線形空間 V, W と V の基底 v_i $(i \in I)$ 及び W の部分集合 $\{w_i \mid i \in I\}$ が与えられているとする. 写像 $f\colon V \to W$ を, 各 $v \in V$ を $v = \sum_{i \in I} c_i v_i$ と基底の線形結合で表して, $f(v) := \sum_{i \in I} c_i w_i$ で定める. この写像 f が線形写像であることを示せ.

問題 3.3 (講義ノートの系 3.3.7). 同型が線形空間どうしの同値関係を定めることを示せ.

問題 3.4 (講義ノート補題 1.4.3; 問題 1.4.1). 任意の線形写像 $f\colon V \to W$ について, 以下が成立することを示せ.

(1) $f(0_V) = 0_W$.

(2) f が単射であることと, 任意の $v \in V$ について $f(v) = 0_W$ なら $v = 0_V$ であることは同値

問題 3.5 (講義ノートの命題 3.3.11). 有限次元線形空間 V, W について, $V \cong W \iff \dim V = \dim W$ を示せ.

問題 3.6. 体 $\mathbb{K}$ 上の四次元線形空間 $V = \mathbb{K}[x]_{\le 3} := \{f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 \mid f_i \in \mathbb{K}\}$ を考える.
写像 $D\colon V \to V$ を $D(f) := f_1 + 2f_2 x + 3f_3 x^2$ で定めると $D \in \mathrm{End}(V)$ である.

(1) V の (順序付き) 基底 $B := (1, x, x^2, x^3)$ に関する D の行列表示 $D_B \in M(4; \mathbb{K})$ を求めよ.

(2) V の (順序付き) 基底 $B' := (1, x, x(x+1), x(x+1)(x+2))$ に関する D の行列表示 $D_{B'} \in M(4; \mathbb{K})$ を求めよ.

最初の 5 問は講義ノート該当箇所を参照.

解答 3.6. (1) $D(B) = BD_B$ に沿って計算すると

$$\begin{pmatrix} D(1) & D(x) & D(x^2) & D(x^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

よって $D_B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) $D(B') = B'D_{B'}$ に沿って計算すると

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} D(1) & D(x) & D(x(x+1)) & D(x(x+1)(x+2)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+2x & 2+3x+3x(x+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & x(x+1) & x(x+1)(x+2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 3 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって $D_{B'} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 3 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{smallmatrix}\right)$.