§3 線形写像の行列表示　　4.25.1

§3.1, 3.2 線形写像の空間

線形空間/写像は体$\mathbb{K}$上のもの.

Dfn. 3.1.1. V, W: 線形空間

準同型 (homomorphism)

$\mathrm{Hom}(V,W) := \{ f : V \to W \mid$ 線形写像$\}$

$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V,V) \ni f$: Vの自己準同型 (endomorphism) □

Prp. 3.2.6. (線形写像のなす線形空間)

V, W : $\mathbb{K}$線形空間. $\mathrm{Hom}(V,W)$は以下の和とスカラー倍で$\mathbb{K}$線形空間.

$f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $c \in \mathbb{K}$

$f+g : V \to W$, $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$　$({}^\forall v \in V)$

$cf : V \to W$, $(cf)(v) := c \cdot f(v)$

零元 : $0 : V \to W$, ${}^\forall v \mapsto 0_W$,　fの逆元 $-f : V \to W$, $v \mapsto -f(v)$

Prf. 問3.1. □

Prp. 3.1.3. 3.3.12. V, W : 線形空間,

$\{ v_i \mid i \in I \}$: Vの基底. ${}^\forall i \in I$. $w_i \in W$ given.

$\Rightarrow \exists! f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ s.t. $f(v_i) = w_i \ {}^\forall i \in I$

唯一つ存在

Prf. $V \ni {}^\forall v$, $\exists! (c_i)_{i \in I}, c_i \in \mathbb{K}$ s.t. 有限コのiを除いて$c_i = 0$, $v = \sum_{i \in I} c_i v_i$

$f : V \to W$ を $f(v) := \sum_{i \in I} c_i w_i$ で定めると,

fは線形 かつ $f(v_i) = f(\sum_j \delta_{ij} v_j) = \sum_j \delta_{ij} w_j = w_i$

問3.2.　　Kroneckerデルタ

逆に $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ が $g(v_i) = w_i \ {}^\forall i \in I$ なら

${}^\forall v \in V$, $v = \sum_{i \in I} c_i v_i$ と表せて

$g(v) = g(\sum_i c_i v_i) = \sum_i c_i g(v_i) = \sum c_i w_i = f(v)$

gは線形

よって $g = f$. □

§3.3. 同型

Dfn. 3.3.6 線形空間 $f: V \to W$ が同型 $:\Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 同型写像
このとき $V \cong W$ と書く. □ $\Leftrightarrow$ 〃 , 可逆

Cor. 3.3.7 同型は線形空間どうしの同値関係を定める. つまり $\forall U, V, W$: 線形空間
(i) $V \cong V$
(ii) $V \cong W \Rightarrow W \cong V$
(iii) $U \cong V$ かつ $V \cong W$ なら $U \cong W$

Prf. 問3.3. □

Prp. 3.3.8 3.3.13 V, W: 線形空間, $\{v_i \mid i \in I\}$: V の基底
このとき, 線形写像 $f: V \to W$ について
(i) f は同型写像 $\Leftrightarrow$ (ii) $\{f(v_i) \mid i \in I\}$ は W の基底.

Prf. (i) $\Rightarrow$ (ii)

線形独立: $\sum_{i \in I} c_i f(v_i) = 0$, $c_i \in \mathbb{K}$, 有限こを除いて 0 なら
$0_W = \sum_{i \in I} c_i f(v_i) = f(\sum_{i \in I} c_i v_i)$ ($\because f$: 線形)
f は線形単射だから $\sum_{i \in I} c_i v_i = 0_V$ (問3.4)
v_i 達は線形独立だから $c_i = 0$ $\forall i \in I$

生成: $\forall w \in W$. f は全射だから $\exists v \in V$ $f(v) = w$.
v_i 達は V を張るから $v = \sum_{i \in I} c_i v_i$, $\exists c_i \in \mathbb{K}$, 有限こを除いて 0
$\therefore w = f(v) = f(\sum_{i \in I} c_i v_i) = \sum_{i \in I} c_i f(v_i)$
f: 線形

(ii) $\Rightarrow$ (i)

単射: $\forall v \in V$. $f(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ を示せば良い. (問3.4)
v_i 達は V を張るから, $\exists c_i \in \mathbb{K}$, $v = \sum_{i \in I} c_i v_i$.
$\therefore 0 = f(v) = f(\sum_{i \in I} c_i v_i) = \sum_{i \in I} c_i f(v_i)$. 線形独立なので $c_i = 0$

全射: $f(v_i)$ 達は W を張るから. $W \ni \forall w = \sum c_i f(v_i)$, $\exists c_i \in \mathbb{K}$
$\therefore v := \sum_{i \in I} c_i v_i \in V$. $f(v) = f(\sum_{i \in I} c_i v_i) = \sum_i c_i f(v_i) = w$ □

問3.4. $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$
(1) $f(0_V) = 0_W$　(2) fが単射 $\Longleftrightarrow$ $\forall v \in V,\ f(v)=0_W$ なら $v=0_V$

Thm. 3.3.9. V: 有限次元線形空間. $n := \dim V$
このとき $V \cong \mathbb{K}^n$ ←数ベクトル空間

Pf. 仮定から $\exists \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$: 基底
$h: V \to \mathbb{K}^n,\ v = \sum_{i=1}^n c_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^n c_i e_i = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

単位ベクトル $\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ \\ i \\ \\ n \end{array}$

は線形写像で、逆写像
$g: \mathbb{K}^n \to V,\quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n c_i v_i$
を持つ. よって $\therefore V \underset{h}{\simeq} \mathbb{K}^n$ $\square$
"hは同型写像"の意.

Prp. 3.3.11. V, W: 有限次元線形空間.
$V \cong W \Longleftrightarrow \dim V = \dim W$

Pf. Cor.3.3.7 と Thm.3.3.9 から. 詳細は問3.5. $\square$

§3.4. 行列表示

Dfn 3.4.2. V, W：有限次元線形空間，$n := \dim V$，$m := \dim W$
$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$，$\{w_1, \dots, w_m\} \subset W$：基底
$f : V \to W$：線形写像
$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in M(m, n ; \mathbb{K})$ を次で定める
$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij}$ ← $a_{ij} \in \mathbb{K}$ で $w_i \in W$ をスカラー倍
A を f の $\{v_j\}_{j=1}^{n}$，$\{w_i\}_{i=1}^{m}$ による行列表示という．$\square$

Rmk 3.4.3
$$(f(v_1), \dots, f(v_n)) = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ $\square$

Prp 3.4.1. 3.4.2.の仮定の下．
$l_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$，$v \mapsto Av$　行列表示 A の左掛け算写像
$$l_A = g_W^{-1} \circ f \circ g_V$$
但し $g_V \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, V)$，$e_j \mapsto v_j$　$(j = 1, \dots, n)$
$g_W \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, W)$，$e_i \mapsto w_i$　$(i = 1, \dots, m)$　} Thm.3.3.9. Pf の同型写像 $\square$

Prp 3.4.7 3.4.2の仮定の下．
$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong M(m, n ; \mathbb{K})$$
Pf. $\varphi : f \mapsto$ (fの行列表示)　← 行列の和 $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
は線形写像で，　スカラー倍 $c \cdot (a_{ij}) = (c a_{ij})$
で線形空間
$\psi : (a_{ij}) \mapsto (v_j \mapsto \sum_i w_i a_{ij}$ で定まる線形写像 $V \to W)$
を逆写像に持つ．　← Prp. 3.1.3 / 3.3.12 $\square$

§3.5は次回．