現代数学基礎 BI　4 月 18 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. n を正整数とする. 実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$V := \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n+1} v_k = 0 \right\}$$

は数ベクトルの和とスカラー倍に関して実線形空間をなす. $\mathbb{R}^{n+1}$ の単位ベクトルを

$$\varepsilon_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{n+1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表し, V の元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ で定める. そして $\mathbb{R}^{n+1}$ から $\mathbb{R}^{n+1}$ 自身への写像 $s_1, \ldots, s_n$ を以下の様に定める.

$$s_i(v) := v - \frac{2(v, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad (v \in \mathbb{R}^{n+1},\ i = 1, \ldots, n).$$

但し $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の Euclid 内積を表す. つまり $v = (v_k)_{k=1}^{n+1}$, $w = (w_k)_{k=1}^{n+1}$ に対して $(v, w) := \sum_{k=1}^{n+1} v_k w_k$.

(1) s_i の V への制限 $s_i|_V$ は V から V 自身への $\mathbb{R}$ 線形写像であることを示せ.

(2) 簡単のため制限写像 $s_i|_V$ のことを s_i と書き, 写像の合成を $s_i s_j := s_i \circ s_j$, $s_i^2 := s_i \circ s_i$ 等と略記する. 以下の等式を示せ.

$$s_i^2 = \mathrm{id}_V \ (V \text{ 上の恒等写像},\ i = 1, \ldots, n), \quad s_j s_{j+1} s_j = s_{j+1} s_j s_{j+1} \ (j = 1, \ldots, n-1).$$

解答 1. 任意の $v = (v_k)_{k=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$ と $(v, \alpha_i) = v_i - v_{i+1}$ より

$$s_i(v) = v - (v, \alpha_i)\alpha_i = v - (v_i - v_{i+1})\alpha_i = \big(v_k - \delta_{k,i}(v_i - v_{i+1}) + \delta_{k,i+1}(v_i - v_{i+1})\big)_{k=1}^{n+1}.$$

但し $\delta_{i,j}$ は Kronecker デルタ. よって $s_i(v)$ の第 k 成分 $s_i(v)_k$ は

$$s_i(v)_k = \begin{cases} v_k & (k \neq i, i+1) \\ v_{i+1} & (k = i) \\ v_i & (k = i+1) \end{cases} \tag{\#}$$

となり, ベクトル $s_i(v)$ は v の第 i 成分と第 $i+1$ 成分を置き換えたものである.

(1) まず $s_i \colon V \to V$, つまり任意の $v \in V$ に対して $s_i(v) \in V$ であることを示す. (#) より

$$\sum_{k=1}^{n+1} s_i(v)_k = \sum_{k=1}^{n+1} v_k = 0.$$

従って $s_i(v) \in V$ である.

次に s_i が $\mathbb{R}$ 線形写像であることを示す. 任意の $v, w \in V$ に対して

$$s_i(v + w) = (v + w) - (v + w, \alpha_i)\alpha_i = (v - (v, \alpha_i)\alpha_i) + (w - (w, \alpha_i)\alpha_i) = s_i(v) + s_i(w)$$

であり, また任意の $c \in \mathbb{R}$ と $v \in V$ に対して

$$s_i(cv) = cv - (cv, \alpha_i)\alpha_i = c(v - (v, \alpha_i)\alpha_i) = c.s_i(v).$$

よって $\mathbb{R}$ 線形写像である.

(2) 前半について. (#) より s_i は第 i 成分と第 $i+1$ 成分の入れ替えだから, それを 2 回行う s_i^2 は各成分を動かさない恒等写像である.

後半について. 任意の $v = (v_k)_{k=1}^{n+1} \in V$ は写像 $s_j s_{j+1} s_j$ によって

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ v_{j+1} \\ v_{j+2} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \xmapsto{s_j} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j+1} \\ v_j \\ v_{j+2} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \xmapsto{s_{j+1}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j+1} \\ v_{j+2} \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \xmapsto{s_j} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j+2} \\ v_{j+1} \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

に写り, また写像 $s_{j+1} s_j s_{j+1}$ によって

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ v_{j+1} \\ v_{j+2} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \xmapsto{s_{j+1}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ v_{j+2} \\ v_{j+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \xmapsto{s_j} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j+2} \\ v_j \\ v_{j+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \xmapsto{s_{j+1}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j+2} \\ v_{j+1} \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

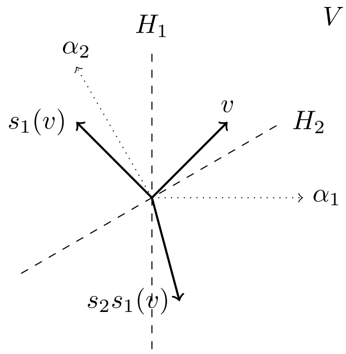
に写る. よって $(s_j s_{j+1} s_j)(v) = (s_{j+1} s_j s_{j+1})(v)$ が任意の $v \in V$ に対して成立するので, 写像として $s_j s_{j+1} s_j = s_{j+1} s_j s_{j+1}$ である.

解答 2. (2) は幾何学的に考えることもできる.

s_i は α_i と垂直な超平面 $H_i \subset V$ に関する鏡映である. 二回行えば元に戻るので前半が成立する.

後半は $j = 1$ の場合を示せば十分で, 従って $n = 2$ の場合の $V \subset \mathbb{R}^3$ について考えれば十分 (右図参照).

α_1 と α_2 は V 上にあって 120 度の角をなす. α_1 に垂直な直線 H_1 と α_2 に垂直な直線 H_2 は原点 $0 \in V$ において 60 度の角度で交わる. 従って任意の $v \in V$ に対し, $s_2 s_1(v) \in V$ はベクトル v を原点周りに 240 度回転させたベクトルである. よって三回行えば元に戻る: $(s_2 s_1)^3(v) = v$. つまり $s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 = \mathrm{id}_V$. 両辺に右から $s_2 s_1 s_2$ を合成して, 前半の $s_1^2 = s_2^2 = \mathrm{id}_V$ を用いれば $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ が得られる.



解答 3. (2) は直接計算でも示せる. 前半は

$$\begin{aligned} s_i^2(v) &= s_i(v - (v, \alpha_i)\alpha_i) = v - (v, \alpha_i)\alpha_i - (v - (v, \alpha_i)\alpha_i, \alpha_i)\alpha_i \\ &= v - (v, \alpha_i)\alpha_i - (v, \alpha_i)\alpha_i + (v, \alpha_i)(\alpha_i.\alpha_i)\alpha_i = v - (v, \alpha_i)\alpha_i - (v, \alpha_i)\alpha_i + 2(v, \alpha_i)\alpha_i = v. \end{aligned}$$

後半は, まず左辺について

$$\begin{aligned} s_j s_{j+1} s_j(v) &= s_j s_{j+1}(v - (v, \alpha_j)\alpha_j) = s_j(v - (v, \alpha_j)\alpha_j - (v, \alpha_{j+1})\alpha_{j+1} + (v, \alpha_j)(\alpha_{j+1}, \alpha_j)\alpha_{j+1}) \\ &= s_j(v - (v, \alpha_j)\alpha_j - (v, \alpha_{j+1})\alpha_{j+1} - (v, \alpha_j)\alpha_{j+1}) \\ &= v - (v, \alpha_j)\alpha_j - (v, \alpha_{j+1})\alpha_{j+1} - (v, \alpha_j)\alpha_{j+1} \\ &\qquad - (v, \alpha_j)\alpha_j + (v, \alpha_j)(\alpha_j, \alpha_j)\alpha_j + (v, \alpha_{j+1})(\alpha_{j+1}, \alpha_j)\alpha_j + (v, \alpha_j)(\alpha_{j+1}, \alpha_j)\alpha_j \\ &= v - (v, \alpha_j)\alpha_j - (v, \alpha_{j+1})\alpha_j - (v, \alpha_j)\alpha_{j+1} - (v, \alpha_{j+1})\alpha_{j+1}. \end{aligned}$$

この計算で j と $j+1$ を置換すれば右辺の計算になって

$$s_{j+1}s_js_{j+1}(v) = v - (v, \alpha_{j+1})\alpha_{j+1} - (v, \alpha_j)\alpha_{j+1} - (v, \alpha_{j+1})\alpha_j - (v, \alpha_j)\alpha_j$$

となり, $s_js_{j+1}s_j(v) = s_{j+1}s_js_{j+1}(v)$ が任意の $v \in V$ に対して (実は任意の $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対しても) 成立することが分かる.

コメント. (1) を 1 点, (2) の前半を 1 点, (2) の後半を 1 点として, 3 点満点で採点しました. 平均点は 1.9 点でした.

(1) において, V から V への写像であることに言及していない答案が目立ちましたが, その場合の (1) は 0 点にしました (次段落の説明を参照). また (2) において "$s_i^2 = s_i(s_i(v))$" など, 写像とその値の違いを軽視している答案も多く見られました. いずれも写像に対する理解が浅いことが原因でしょう.

制限写像について補足します. 写像 $f\colon X \to Y$ と部分集合 $X' \subset X$ に対し, **f の X' への制限写像 $f|_{X'}$** とは定義域を X' に制限した写像, つまり

$$f|_{X'} : X' \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto f(x)$$

のことです. **制限写像 $f|_{X'}$ の値域は元の写像 f の値域 Y** です. 問題 (1) では $s_i\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ の定義域を $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に制限した $s_i|_V : V \to \mathbb{R}^{n+1}$ を考えているので, まず **$s_i|_V$ が写像 $V \to V$ を定める**こと, つまり **像 $s_i|_V(V) = f(V)$ が V に含まれている**ことを示す必要があります.

部分集合 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は **A_n 型ルート系の単純ルートの集合**であり, **s_i は α_i に付随する単純鏡映**です. s_i 達が生成する $\mathrm{GL}(V)$ の部分群 W は **A_n 型ルート系の Weyl 群**と呼ばれ, 抽象群としての表示 (**Coxeter 表示**)

$$W = \langle s_1, \ldots, s_n \mid s_i^2 \ (i = 1, \ldots, n),\ (s_js_{j+1})^3 \ (j = 1, \ldots, n-1) \rangle$$

を持ちます. 後半の関係式 $s_js_{j+1}s_j = s_{j+1}s_js_{j+1}$ は**組紐関係式** (braid relation) と呼ばれます. 更に W は **$n+1$ 次対称群 S_{n+1}** と同型です. S_{n+1} の元を文字 $1, \ldots, n+1$ の置換とみなすと,

$$W \xrightarrow{\sim} S_{n+1}, \quad s_i \longmapsto (i, i+1) \quad (i \text{ と } i+1 \text{ の互換})$$

で群同型が与えられます.