現代数学基礎 BI　4 月 18 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題 2.1 (講義ノートの例 2.4.14)**.** 体 $\mathbb{K}$ に係数を持つ一変数多項式全体がなす $\mathbb{K}$ 線形空間 $\mathbb{K}[x]$ が $\mathbb{K}$ 上無限次元であることを示せ.

問題 2.2 (講義ノートの補題 2.5.6)**.** V を有限次元線形空間とし, $W \subset V$ をその部分空間とする. このとき W も有限次元で $\dim W \subset \dim V$ であることを示せ.

問題 2.3 (講義ノートの定理 2.5.8)**.** 基底延長定理 (講義ノートの定理 2.4.15 または系 2.6.4) を用いて, 有限次元線形空間 V の部分空間 W_1, W_2 の和 $W_1 + W_2$ の次元公式を導け:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

問題 2.4. 体 $\mathbb{K}$ 係数の n 変数多項式のなす $\mathbb{K}$ 線形空間 $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を $V(n)$ と書く. 非負整数 d に対し, d 次斉次多項式部分集合 $V(n,d) \subset V(n)$ が部分空間であることを示し, 更に $\dim V(n,d)$ を求めよ.

例えば $n = 2$, $d = 0, 1, 2, \ldots,$ に対しては, $V(2) = \mathbb{K}[x, y]$ と変数を置き直すと

$$\begin{aligned}
&V(2,0) = \mathbb{K}, \quad V(2,1) = \{ax + by \mid a, b \in \mathbb{K}\}, \quad V(2,2) = \{ax^2 + bxy + cy^2 \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}, \\
&V(2,3) = \{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{K}\}, \\
&V(2,4) = \{ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{K}\}, \quad \cdots
\end{aligned}$$

より

$$\dim V(2,0) = 1,\ \dim V(2,1) = 2,\ \dim V(2,2) = 3,\ \dim V(2,3) = 4,\ \dim V(2,4) = 5,\ \cdots$$

解答 2.1. 講義ノートの例 2.4.14 参照.

解答 2.2. 講義ノートの補題 2.5.6 参照.

解答 2.3. 講義ノートの定理 2.5.8 参照.

解答 2.4. 前半は略. 後半は, d 次単項式 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$, $d_1+d_2+\cdots+d_n=d$ が $V(n,d)$ の基底をなすから, それらの数を数えると $\dim V(n,d)=\binom{d+n-1}{n-1}$.