§2. 基底と次元 （$\mathbb{K}$：体）

§2.1. 線形部分空間

Dfn. 2.1.1. $V=(V,+,\cdot)$： $\mathbb{K}$ 線形空間 $+ : V\times V\to V$, $\cdot : \mathbb{K}\times V\to V$

部分集合 $W\subset V$ が V の線形部分空間 和とスカラー倍で閉じている

$:\Leftrightarrow 0_V\in W$ かつ $\forall v,w\in W$ $v+w\in W$ かつ $\forall w\in W, \forall c\in\mathbb{K}$, $c.w\in W$

〃 かつ 〃 , $\forall c,d\in\mathbb{K}$ $cv+dw\in W$ $\square$

Exm. V：$\mathbb{K}$ 線形空間, $v\in V$. $\mathbb{K}v := \{cv\in V \mid c\in\mathbb{K}\}$：部分空間
（証明：問2.0） $\square$

Exm. 2.1.7. $\mathbb{K}^n = W_n \supset W_{n-1}\supset\cdots\supset W_1\supset W_0=\{0\}$

$$W_k := \left\{ \begin{pmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n \;\middle|\; w_i\in\mathbb{K}\right\}$$

は 部分空間になる. $\square$

Exm. 2.1.9 （連立方程式の解空間） A：$\mathbb{K}$ 係数 $m\times n$ 行列.

$S := \{x\in\mathbb{K}^n \mid Ax=0\}\subset\mathbb{K}^n$ は 部分空間

Prf. $0_{\mathbb{K}^n}\in S$, $\forall x,y\in S$, $\forall a,b\in\mathbb{K}$, $A(ax+by) = aAx+bAy = 0+0=0$

$\therefore$ $ax+by\in S$ $\square$

例えば $I=\{1,\ldots,n\}$ $W_1,\ldots,W_n\subset V$

Prp. 2.1.12 V：$\mathbb{K}$ 線形空間, $W_i\subset V$ $(i\in I)$：部分空間の族

$\Rightarrow W := \bigcap_{i\in I} W_i\subset V$ は部分空間

Prf. $\forall i\in I$, $0_V\in W_i$ $\therefore$ $0_V\in\bigcap_{i\in I}W_i = W$

$\forall v,w\in W$ $\forall c,d\in\mathbb{K}$ $\forall i\in I$

$v,w\in W_i$, $W_i\subset V$ は部分空間 $\therefore$ $cv+dw\in W_i$

$\therefore$ $cv+dw\in\bigcap_{i\in I}W_i = W$.

§2.2. 部分空間の和と生成系

Prp. 2.2.2. V : $\mathbb{K}$線形空間, $V_i \subset V$ $(i \in I)$: 部分空間の族

$\Rightarrow$ $\sum_{i\in I} V_i := \{ \sum_{i \in I} v_i \in V \mid v_i \in V_i \ (i \in I)$, 有限コを除いて $v_i = 0 \}$

はVの部分空間 □

Iが無限集合でも、$\sum V_i$ に意味がある。

Rmk. Iが有限集合なら $\sum_{i\in I} V_i = \{ \sum_{i \in I} v_i \in V \mid v_i \in V_i \ (i \in I) \}$

Dfn. 2.2.3 $\sum_{i\in I} V_i$ を V_i達の和空間という。 □

Dfn. 2.2.5. V : $\mathbb{K}$線形空間, $S \subset V$: 部分集合

(1) $\langle S \rangle := \sum_{v \in S} \mathbb{K} v \subset V$: 部分空間.

: Sが生成する部分空間

(2) $W \subset V$: 部分空間

$W = \langle S \rangle$の時, SをWの生成系という. □

Rmk. 2.2.6. $\langle S \rangle = \{ \sum_{v \in S} c_v v \mid c_v \in \mathbb{K}$, 有限コのvを除いて $c_v = 0 \}$

← Sの線形結合

SがVを生成する $\Leftrightarrow$ Vの任意の元はSの線形結合で表せる □

Exm. 2.2.7. (1) $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は$\mathbb{K}^n$の生成系

(2) $\mathbb{K}[x] = \{ \mathbb{K}$係数多項式$\}$: $\mathbb{K}$線型空間.

$\{1, x, x^2, \dots\} = \{ x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}$ は$\mathbb{K}[x]$の生成系 □

§2.3. 線形独立性

Dfn. 2.3.2. V: $\mathbb{K}$ 線形空間. $S \subset V$. 部分集合. S が線形独立
$:\Longleftrightarrow$ "$c_v \in \mathbb{K}$ $(v \in S)$, 有限個の v を除いて $c_v = 0$ かつ
$\sum_{v \in S} c_v v = 0$
$\Rightarrow$ $\forall i \in I$ $c_i = 0$ " $\square$

Exm. 2.3.4, 2.3.5. (1) $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n$ は線形独立
(2) $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{K}[x]$ 〃 $\square$

§2.4. 基底

Dfn. 2.4.1. V: 線形空間, $B \subset V$: 部分集合.
B が基底 $:\Longleftrightarrow$ 線形独立かつ V の生成系. $\square$

Exm. 2.4.2, 2.4.3. $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n$, $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{K}[x]$ は基底. $\square$

Thm. 2.4.11. 任意の線形空間は基底を持つ.

Dfn. 2.4.12. 基底として有限集合が取れる線形空間を有限次元,
そうでないものを無限次元という $\square$

Exm. 2.4.13. $\mathbb{K}^n$ は有限次元. $\mathbb{K}[x]$ は無限次元
2.4.14 Pf. (後半) 多項式の次数に注目 (問2.1) $\square$

§2.5. 次元

<u>Thm.</u> 2.5.1. 有限次元線形空間 V の基底 B, B' について $|B|=|B'|$ □

<u>Dfn.</u> (次元) 2.5.2. $\dim_{\mathbb{K}} V := |B|$ □

← $\dim V$ と略記.

<u>Rmk.</u> $\dim V$ は well-defined. つまり基底の取り方によらない. □

<u>Lem.</u> 2.5.6 V: 有限次元線形空間. $W \subset V$: 部分空間

$\Rightarrow$ W も有限次元で $\dim W \leqq \dim V$.

<u>Prf.</u> 問 2.2. □

<u>Thm.</u> 2.5.8 (和空間の次元公式)

V: 有限次元線形空間, $W_1, W_2 \subset V$: 部分空間

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1+W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

<u>Prf.</u> 次の Thm. を使う (問 2.3) □

<u>Thm.</u> 2.6.4 (基底の延長) V: 線形空間, $W \subset V$: 部分空間, $B \subset W$: 基底.

$\Rightarrow$ $B \subset {}^{\exists}B' \subset V$, V の基底. □