現代数学基礎 BI　4 月 11 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題. 実数を成分とする行列を考える[*1]. X をサイズ $n \times m$ の行列, Y をサイズ $m \times n$ の行列とする. 行列の積 XY は n 次正方行列であり, 特に行列式 $\det(XY)$ を考えることができる. $m < n$ の場合, $\det(XY) = 0$ である事を示せ.

まず一番簡単な解法を紹介します. 皆さんの答案の 6 割位がこの解法でした.

解答 1. X に零ベクトルを $n - m$ 列付け加えてできる n 次正方行列を X' とし, Y に零ベクトルを $n - m$ 行付け加えてできる n 次正方行列を Y' とする.

$$X' := \begin{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ X & & & \\ & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad Y' := \begin{pmatrix} & & Y & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

ブロック行列の計算から $X'Y' = XY + O = XY$ である. 一方で積の行列式の性質から $\det(X'Y') = \det(X')\det(Y')$ であり, X' の列ベクトルや Y' の行ベクトルには零ベクトルが含まれるから $\det(X') = \det(Y') = 0$. 以上より $\det(XY) = \det(X'Y') = 0$.

次に答案の中で二番目に多かった解法を紹介します. ただし, 以下の様に厳密に議論している答案は殆どありませんでした.

解答 2. n 次正方行列 Z に関する以下の三つの主張は同値である.

$$\det(Z) = 0 \iff Z \text{ は逆行列を持たない} \iff Z \text{ の階数 } \operatorname{rank}(Z) \text{ は } n-1 \text{ 以下}.$$

よって $\operatorname{rank}(XY) < n$ を示せば良い. また, $p \times q$ 次正方行列 Z による左掛算写像を $l_Z \colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$, $v \mapsto Zv$ と書くと, 行列 Z の階数は線形写像 l_Z の像 $\operatorname{Im} l_Z$ の次元と等しい: $\operatorname{rank}(Z) = \dim(\operatorname{Im} l_Z)$. そして, 行列の積 XY について $l_{XY} = l_X \circ l_Y$ が成立する. すると

$$\operatorname{rank}(XY) = \dim(\operatorname{Im} l_{XY}) = \dim(\operatorname{Im} l_X \circ l_Y).$$

ここで $\operatorname{Im} l_Y = l_Y(\mathbb{C}^n) \subset \mathbb{C}^m$ は部分空間なので $\operatorname{Im} l_X \circ l_Y = (l_X \circ l_Y)(\mathbb{C}^n) = l_X(l_Y(\mathbb{C}^n)) \subset l_X(\mathbb{C}^m) = \operatorname{Im} l_X$ も部分空間. よって

$$\dim(\operatorname{Im} l_X \circ l_Y) \leq \dim(\operatorname{Im} l_X) = \operatorname{rank}(X).$$

ところで, 任意の行列 M について M の階数は M の列ベクトルのうち一次独立なものの最大個数と等しく, また M の行ベクトルのうち一次独立なものの最大個数と等しい. よって行列 X の階数は $\min\{m, n\} = m$ 以下. 以上より

$$\operatorname{rank}(XY) = \dim(\operatorname{Im} l_X \circ l_Y) \leq \operatorname{rank}(X) \leq m < n.$$

[*1] 実数体に限らず, 任意の体上で考えても良いです.

最後に元々用意していた解法を紹介します. 上の二つと比べるとかなり面倒ですね.

解答 3. n 次正方行列 Z に関する以下の四つの主張は同値である.

$$\begin{aligned}\det(Z) = 0 &\iff Z \text{ は逆行列を持たない} \iff Z \text{ の階数は } n-1 \text{ 以下} \\ &\iff Z \text{ の列ベクトルのうち一次独立なものは } n-1 \text{ 個以下}\end{aligned}$$

よって正方行列 XY の階数が $n-1$ 以下であることを示せば良い. X と Y を

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}, \quad y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$$

とそれぞれ列ベクトルと行ベクトルに分けると, 積 XY は次のように列ベクトルに分けることができる.

$$XY = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix}, \quad z_j = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_j \\ x_2 \cdot y_j \\ \vdots \\ x_n \cdot y_j \end{pmatrix}, \quad x_i \cdot y_j := \sum_{k=1}^{m} x_{im} y_{mj} \tag{\#}$$

ところで, 任意の行列 M について

$$\begin{aligned} M \text{ の階数} &= M \text{ の列ベクトルのうち一次独立なものの最大個数} \\ &= M \text{ の行ベクトルのうち一次独立なものの最大個数} \end{aligned}$$

が成立する. Y はサイズ $m \times n$ だから, Y の階数は $\min\{m, n\} = m$ 以下. よって列ベクトル $y_1, \ldots, y_n$ は一次従属であり, 特に y_n は $y_1, \ldots, y_{n-1}$ の一次結合として

$$y_n = \sum_{l=1}^{n-1} c_l y_l, \quad (c_1, \ldots, c_l) \neq (0, \ldots, 0)$$

と書ける. すると (#) の z_n は

$$z_n = \begin{pmatrix} x_1 \cdot (\sum_{l=1}^{n-1} c_l y_l) \\ \vdots \\ x_n \cdot (\sum_{l=1}^{n-1} c_l y_l) \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n-1} c_l z_l, \quad (c_1, \ldots, c_l) \neq (0, \ldots, 0)$$

と書けるので, $z_1, \ldots, z_{n-1}$ の非自明な一次結合である. よって XY の列ベクトルのうち一次独立なものは高々 $n-1$ 個であり, 従って階数は $n-1$ 以下である.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.6 点でした.

以上です.