現代数学基礎 BI　 4 月 11 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題 1.1 (c.f. 講義ノートの問題 1.1.4)**.** p を素数とし, $\mathbb{F}_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$ に二項演算 $+_p$ と $\cdot_p$ を $a +_p b := a + b \bmod p$, $a \cdot_p b := a \cdot b \bmod p$ で定義する. 高校数学で学んだように, $(\mathbb{F}_p, +_p, \cdot_p)$ は可換環である. これが更に体であること, つまり講義ノートの定義 1.1.6 の条件 (9) を満たすことを示せ.

問題 1.2. S を空でない集合とする. $\mathbb{R}^S := \{\text{写像 } S \to \mathbb{R}\}$ について, 任意の $f, g \in \mathbb{R}^S$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して $f + g, a.f \in \mathbb{R}^S$ を $(f+g)(s) := f(s) + g(s)$, $(a.f)(s) := a \cdot f(s)$ $(s \in S)$ で定義すると, $(\mathbb{R}^S, +, .)$ が $\mathbb{R}$ 線形空間になることを示せ.

問題 1.3. $U \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $\mathbb{R}$ 線形空間 $C^\infty(U) = \{f \colon U \to \mathbb{R} \mid \text{任意回微分可能}\}$ を考える. 微分 $\frac{d}{dx} \colon f \mapsto f' = \frac{df}{dx}$ が $\mathbb{R}$ 線形写像 $\frac{d}{dx} \colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ を定めることを示せ.

問題 1.4. 行列 $X \in M(m, n; \mathbb{R})$ について, 以下の同値を示せ.

$$\text{左掛算写像 } l_X \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ が同型} \iff m = n \text{ かつ } X \text{ が正則行列.}$$

問題 1.5 (**Vandermonde の行列式**, 講義ノートの問題 1.0.1)**.** n を正整数とし, $x_1, \dots, x_n$ を (可換な) 文字とする. (i, j) 成分が x_i^{j-1} の n 次正方行列の行列式が

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

となることを示せ.

問題 1.6 (**Schur 多項式**, 講義ノートの問題 1.0.2)**.** n を正整数, $x_1, \dots, x_n$ を (可換な) 文字, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を非負整数の列とする. (i, j) 成分が $x_i^{\lambda_j + j - 1}$ の n 次正方行列と x_i^{j-1} の n 次正方行列を考え, それらの行列式の商を s_λ と書く. つまり

$$s_\lambda := \frac{\det(x_i^{\lambda_j + j - 1})_{i,j=1}^n}{\det(x_i^{j-1})_{i,j=1}^n}.$$

例えば $n = 2$, $\lambda = (l, m)$, $l \le m$ なら

$$s_{(l,m)} := \frac{\begin{vmatrix} x_1^l & x_1^{m+1} \\ x_2^l & x_2^{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_1^l x_2^{m+1} - x_1^{m+1} x_2^l}{x_2 - x_1} = x_1^l x_2^m + x_1^{l+1} x_2^{m-1} + \cdots + x_1^m x_2^l$$

となって, $m - l + 1$ 項からなる x_1, x_2 の多項式であることが分かる. 一般の n, λ に対して s_λ が x_i 達の多項式になることを示せ.

解答 1.1. $a \in \mathbb{Z}$ と見なすと, 仮定より a は p で割り切れないから, p が素数であることと合わせて, a と p は互いに素である．よって (高校数学で Euclid の互除法の系として学んだように) $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在して $ax+py=1$ となる．この等式を $\bmod p$ すれば, $\mathbb{F}_p$ において $a \cdot (x \bmod p) = 1$. よって a の逆元 $x \bmod p \in \mathbb{F}_p$ が確かに存在する．

解答 1.2. 講義ノート命題 1.3.2 の証明を参照.

解答 1.3. 講義ノート例 1.4.6 の特別な場合だが, 念のため示しておく．次の二つの主張を示せば良い.

- 任意の $f, g \in C^\infty(U)$ に対して $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g$ を示す．その為には, 任意の $x \in U$ に対して $\left(\frac{d}{dx}(f+g)\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g\right)(x)$ を示せば良い.

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}(f+g)\right)(x) &\overset{*1}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \overset{*2}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\ &\overset{*3}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &\overset{*1}{=} \left(\frac{d}{dx}f\right)(x) + \left(\frac{d}{dx}g\right)(x) \overset{*2}{=} \left(\frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g\right)(x).\end{aligned}$$

ここで $*1$ では微分の定義, $*2$ では線形空間 $C^\infty(U)$ における和 $+$ の定義, $*3$ では極限に関する命題「右辺の二つの極限が存在していれば極限の和は和の極限に等しい」を用いた.

- 任意の $f \in C^\infty(U)$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して $\frac{d}{dx}(a.f) = a.\frac{d}{dx}f$ を示す．その為には, 任意の $x \in U$ に対して $\left(\frac{d}{dx}(af)\right)(x) = \left(a.\frac{d}{dx}f\right)(x)$ を示せば良い.

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}(a.f)\right)(x) &\overset{*1}{=} \lim_{h\to 0}\frac{(a.f)(x+h)-(a.f)(x)}{h} \overset{*2'}{=} \lim_{h\to 0}\frac{a\cdot f(x+h)-a\cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(a \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \overset{*3'}{=} a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{*1}{=} a\left(\frac{d}{dx}f\right)(x) \overset{*2'}{=} \left(a.\frac{d}{dx}f\right)(x).\end{aligned}$$

ここで $*1$ では微分の定義, $*2'$ では線形空間 $C^\infty(U)$ におけるスカラー倍 . の定義, $*3'$ では極限に関する命題「右辺の極限が存在していれば, 極限の定数倍は定数倍の極限に等しい」を用いた.

解答 1.4. 講義ノート例 1.4.8 参照.

解答 1.5. 講義ノート問題 1.0.1 参照.

解答 1.6. 講義ノート問題 1.0.2 参照.