現代数学基礎 BI　期末試験解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. 有理数体を $\mathbb{Q}$ と書き, n を正整数とする. n 変数の有理数係数多項式全体がなす $\mathbb{Q}$ 上の線形空間を

$$V \coloneqq \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$$

と書く. 各変数 x_i の次数を $\deg x_i \coloneqq 1$ と定め, 定数ではない単項式の次数を $\deg x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} \coloneqq d_1 + \cdots + d_n$ と定める. 任意の非負整数 d に対して, 次数 d の単項式全体が張る部分空間を $V_d \subset V$ と書く. つまり

$$V_d \coloneqq \{\ d \text{ 次斉次多項式 } \} \subset V.$$

(1) $\dim V_d$ を求めよ.

(2) t を変数とする級数 $P(t) \coloneqq \sum_{d=0}^{\infty} (\dim V_d) t^d$ が, 関数 $(1-t)^{-n}$ を $t=0$ で Taylor 展開して得られる級数と一致する事を示せ.

解答. (1) V_d の基底として, n 変数の d 次単項式全体のなす集合 S が取れる. 濃度 $|S|$, つまり n 変数の d 次単項式の数は, 区別できる n 個のものから重複を許して d 個選ぶ場合の数だから

$$\dim V = |S| = \binom{d+n-1}{n-1}.$$

(2) $f(t) \coloneqq (1-t)^{-n}$ と置くと

$$f^{(d)}(0) = n(n+1)\cdots(n+d-1)\,(1-t)^{-n-d}\big|_{t=0} = d! \cdot \binom{d+n-1}{n-1}.$$

よって t の絶対値が十分小さい場合 $f(t) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{f^{(d)}(0)}{d!} t^d = P(t)$.

コメント. (1) と (2) をそれぞれ 10 点, 計 20 点満点で採点しました. 平均点は 12.9 点でした.

(2) は色々な解き方があって, 上記の解答の他には以下の三通りがあります (上記と下の一番目は本質的には同じ). 皆さんの答案で正しい議論をしていたものは, こららの何れかに分類されます.

- 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対する一般二項定理 $(1+x)^{\alpha} = \sum_{d=0}^{\infty} \binom{\alpha}{d} x^d$, $\binom{\alpha}{d} \coloneqq \frac{1}{d!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-d+1)$ で $x=-t$, $\alpha=-n$ とし, $\binom{-n}{d}(-t)^d = \binom{n+d-1}{d} t^d$ を使う.
- $0 < s < 1$ を満たす実数 s を一つ取って固定すると, $|t| < s$ の範囲で $(1-t)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} t^i$ と展開できて, 更に右辺の級数はこの範囲で一様収束する. よって辺々を t で $n-1$ 回微分すると, 右辺の級数は項別微分できて, $(n-1)! \cdot (1-t)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \bigl(i(i-1)\cdots(i-n+1)\bigr) t^{i-n+1}$. この右辺において $i = 0, 1, \ldots, n-1$ の項が 0 である事に注意すると $(1-t)^{-n} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{i(i-1)\cdots(i-n+1)}{(n-1)!} t^{i-n+1} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(d+n-1)(d+n-2)\cdots d}{(n-1)!} t^d = P(t)$.
- $(1-t)^{-n} = \bigl((1-t)^{-1}\bigr)^n = (1+t+t^2+\cdots)^n$ の t^d の係数は, 重複を許して n 個のものから d 個選ぶ場合の数だから (1) の答えとと一致する.

問題 2. 3 次元の実 Euclid 内積空間 $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ を考える．$\mathbb{R}^3$ の標準基底を $e_1 := \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2 := \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e_3 := \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ と書く．この時 $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ $(i,j \in \{1,2,3\})$ が成立する．元 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^3$ を $\alpha_1 := e_1 - e_2$, $\alpha_2 := e_2 - e_3$ で定め, それらが張る $\mathbb{R}^3$ の部分空間を $V := \mathbb{R}\alpha_1 + \mathbb{R}\alpha_2$ と書く．そして二つの写像 $s_1, s_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$s_1(v) := v - \langle v, \alpha_1\rangle \alpha_1, \quad s_2(v) := v - \langle v, \alpha_2\rangle \alpha_2 \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

で定める．また写像の合成を省略して $s_1 s_2 := s_1 \circ s_2$, $s_1^2 := s_1 \circ s_1$ 等と書く．

(1) s_1 と s_2 が V 上の線形変換である事を示せ.

(2) V の基底 α_1, α_2 に関する s_1 と s_2 の行列表示をそれぞれ求めよ.

(3) $s_1^2 = s_2^2 = \mathrm{id}_V$ (V の恒等写像) を示せ.

(4) $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ を示せ.

解答. (1) $i \in \{0,1\}$ とする．内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の双線形性を用いると, 任意の $v, v' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{R}$ に対して

$$s_i(cv+c'v') = (cv+c'v') - \langle cv + c'v', \alpha_i\rangle \alpha_i = (cv+c'v') - (c\langle v, \alpha_i\rangle + c'\langle v', \alpha_i\rangle)\alpha_i = cs_i(v) + c's_i(v').$$

よって $s_i \colon V \to \mathbb{R}^3$ は線形写像．また $\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle = 2$, $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle = -1$ より

$$s_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \quad s_1(\alpha_2) = s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2$$

となって, これらは共に V の元．よって V の基底の像が V の元だから, 前半で示した線形性と合わせて, s_i の値域は V に含まれる．以上より $s_i \colon V \to V$ は V の線形変換である．

(2) s_1, s_2 の行列表示をそれぞれ S, T とすると, 前項の計算から

$$\begin{aligned}\bigl(s_1(\alpha_1), s_1(\alpha_2)\bigr) &= (-\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)S, \quad S = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\ \bigl(s_2(\alpha_1), s_2(\alpha_2)\bigr) &= (\alpha_1+\alpha_2, -\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)T, \quad T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(3) $S^2 = T^2 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ より $s_1^2 = s_2^2 = \mathrm{id}_V$.

(4) $STS = \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\-1&0\end{smallmatrix}\right) = TST$ より $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$.

コメント. (1) と (2) は各 10 点, (3) と (4) は各 5 点として, 計 30 点満点で採点しました．平均点は 24.1 点でした．(1) は線形性の証明を 5 点, s_i の値域が V である事の証明を 5 点としました．

(2) で行列表示の定義をちゃんと理解していない答案が幾つかありました．必ず復習しておいて下さい．

(3), (4) は行列表示を用いずに, 両辺の写像による α_1, α_2 の像が一致する事を示しても良いです．その方針だと, (3) は $s_i^2(\alpha_j) = \alpha_j$ を, (4) は $(s_1s_2s_1)(\alpha_1) = -\alpha_2 = (s_2s_1s_2)(\alpha_1)$, $(s_1s_2s_1)(\alpha_2) = -\alpha_1 = (s_2s_1s_2)(\alpha_2)$ を計算で示せば良いです．

また (4) の問題文は少し曖昧で, “V 上の線形変換として $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$ が成立する事を示せ” が出題の意図でしたが, 実際には $\mathbb{R}^3$ 上の線形変換として同じ等号が成立するので, $\mathbb{R}^3$ 上で示している答案も正解にしました．ただ, V より 1 次元増える分, 計算は面倒になります．

この問題は A_2 型**ルート系**の **Weyl 群**を背景とするものです．ベクトル α_1, α_2 は A_2 型ルート系の**単純ルート**と呼ばれるものです．(2) の表現行列 S と T は可逆な整数係数行列になりましたが, これは偶然ではなく, ルート系の特別な性質を反映しています．また (3) は s_1, s_2 が**鏡映**という特別な線形変換であることの帰結です．そして (4) の関係式は**組み紐関係式** (braid relation) と呼ばれていて, 数学の色々な所に顔を出します．

問題 3. V と W を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とし, 線形写像 $f\colon V \to W$ とその双対写像 $f^*\colon W^* \to V^*$ を考える.

(1) 次の同値を示せ: f が単射 $\Leftrightarrow f^{-1}(0) = \{0\}$.

(2) f が全射なら f^* が単射である事を示せ.

解答. (1) f は線形写像だから $f(0) = 0$. すると, f が単射の時, $v \in V \setminus \{0\}$ なら $f(v) \neq f(0) = 0$ なので $f^{-1}(0) = \{0\}$. 逆に $f^{-1}(0) = \{0\}$ と仮定すると, 相違なる任意の二元 $v, v' \in V$ について, $v - v' \neq 0$ と仮定から $f(v - v') \neq 0$. f は線形写像だから $f(v - v') = f(v) - f(v')$ なので, $f(v) \neq f(v')$. よって f は単射.

(2) f が全射であり, また $\omega \in W^*$ が任意の $v \in V$ に対して $\bigl(f^*(\omega)\bigr)(v) = 0$ を満たすと仮定する. $\bigl(f^*(\omega)\bigr)(v) = \omega\bigl(f(v)\bigr)$ と f の全射性から, 任意の $w \in W$ に対して $\omega(w) = 0$. よって $\omega = 0$ であり, (1) から f^* が単射である事が示せた.

コメント. 各小問を 10 点として, 計 20 点満点で採点しました. 平均点は 16.3 点でした.

(1) で "f が単射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$ から主張が従う" としている答案が散見されましたが, その同値がこの問題で示すべきものです.

(2) は教科書の系 4.3.7.2 の一部で, 部分空間 $X \subset V$ の零化空間 $X^\perp \coloneqq \{f \in V^* \mid f(X) = 0\}$ を使った証明を書いている答案が多くありました. $\perp$ は (線形代数以外では) あまり用いられない記号なので, 使うときは定義を書いておいた方が良いです.

問題 4. 配布した問題文に数か所誤りがありました. その為, (1) と (2) の双線形性の証明だけを採点して, 他の部分は採点しませんでした. 以下の問題文は本来の意図に沿うように訂正してあります.

n を正整数とする. $V \coloneqq \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$ を, 基底 $e_1, \ldots, e_n$ を持つ実数体 $\mathbb{R}$ 上の n 次元線形空間とする. また $V^{\otimes 2} \coloneqq \bigoplus_{i,j=1}^n \mathbb{R}e_i \otimes e_j$ を, n^2 個の基底 $e_i \otimes e_j$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ を持つ線形空間とする.

(1) 任意の二元 $v, w \in V$ を取って $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^n w_j e_j$ $(v_i, w_j \in \mathbb{R})$ と表し,

$$v \otimes w \coloneqq \sum_{i,j=1}^n v_i w_j e_i \otimes e_j \in V^{\otimes 2}$$

と定める. 対応 $(v, w) \mapsto v \otimes w$ が定める写像 $V \times V \to V^{\otimes 2}$ が双線形である事を示せ.

$V^{\otimes 2}$ の n 個の元 $e_i \otimes e_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ が張る部分空間を $D \subset V^{\otimes 2}$ と書き, D が定める商空間を

$$\bigwedge^2 V \coloneqq V^{\otimes 2}/D$$

と書く. また任意の $(v, w) \in V \times V$ に対し, (1) で定めた $v \otimes w \in V^{\otimes 2}$ の同値類を $v \wedge w \in \bigwedge^2 V$ と書く.

(2) 対応 $(v, w) \mapsto v \wedge w$ が定める写像 $V \times V \to \bigwedge^2 V$ が双線形である事を示せ.

(3) $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個の元 $e_i \wedge e_j$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i < j)$ が $\bigwedge^2 V$ の基底をなす事を示せ.

(4) 写像 $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ は交代型式, つまり双線形かつ任意の $v \in V$ に対して $f(v, v) = 0$ を満たすものとする. 商空間の標準全射を $p\colon V^{\otimes 2} \to \bigwedge^2 V$ と書く. p は全射だから, 任意の元 $x \in \bigwedge^2 V$ は $x = p(t)$, $t = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$ $(v_i \in V,\ w_i \in W)$ と表せるが, それを用いて

$$\overline{f}(x) \coloneqq \sum_{i=1}^n f(v_i, w_i) \in \mathbb{R}$$

と定める. 写像 $\overline{f}\colon \bigwedge^2 V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \overline{f}(x)$ が well-defined である事を示せ.

解答. (1) 任意の $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, v' = \sum_{i=1}^n v'_i e_i, w = \sum_{j=1}^n w_j e_j \in V$ と $c, c' \in \mathbb{R}$ に対し

$$(cv + c'v') \otimes w = \sum_{i,j=1}^n (cv_i + c'v'_i) w_j e_i \otimes e_j = c \sum_{i,j=1}^n v_i w_j e_i \otimes e_j + c' \sum_{i,j=1}^n v'_i w_j e_i \otimes e_j = c(v \otimes w) + c'(v' \otimes w)$$

となるので, 第一変数に関して線形. 同様に任意の $v, w, w' \in V$ に対して $v \otimes (cw + c'w') = c(v \otimes w) + c'(v \otimes w')$ となって, 第二変数に関しても線形. よって双線形.

(2) 考えている対応は $(v, w) \mapsto v \otimes w \mapsto v \wedge w$ と分解できて, 前半は (1) より双線形であり, 後半は商空間の標準全射だから線形. よって合成写像は双線形.

(3) $e_i \otimes e_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ が $V^{\otimes 2}$ の基底だから, $e_i \wedge e_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ は $\bigwedge^2 V$ を生成する. $e_i \otimes e_i, (e_i + e_j) \otimes (e_i + e_j) \in D$ なので $e_i \wedge e_i = (e_i + e_j) \wedge (e_i + e_j) = 0$. また (2) で示した $\wedge$ の双線形性から

$$(e_i + e_j) \wedge (e_i + e_j) = e_i \wedge e_i + e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i + e_j \wedge e_j.$$

よって $e_j \wedge e_i = -e_i \wedge e_j$. 以上より $e_i \wedge e_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ は $\bigwedge^2 V$ を生成する. また線形関係式 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} e_i \wedge e_j = 0$, $c_{ij} \in \mathbb{R}$ を仮定すると, $V^{\otimes 2}$ の元 $t \coloneqq \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} e_i \otimes e_j$ は $t \in D$ を満たす. D は $e_i \otimes e_i$ $(1 \leq i \leq n)$ で張られるので, 任意の $i < j$ に対して $c_{ij} = 0$, つまり $t = 0$ である.

(4) テンソル積の普遍性から線形写像 $\widetilde{f} \colon V^{\otimes 2} \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f}(v \otimes w) \coloneqq f(v, w)$ が well-defined. f は交代的だと仮定しているから $u \in D \subset V^{\otimes 2}$ なら $\widetilde{f}(u) = 0$. そこで $x \in \bigwedge^2 V$ について, $x = p(s) = p(t)$, $s, t \in V^{\otimes 2}$ と二通りに書けるなら $t - s \in D$ より $\widetilde{f}(t) = \widetilde{f}(s)$. よって準同型定理より $\overline{f}(x) \coloneqq \widetilde{f}(t)$ が well-defined である.

コメント. 問題の冒頭に書いたように出題ミスがあった為, (1) と (2) の双線形性の証明だけをそれぞれ 10 点として, 計 20 点満点で計算しました. 平均点は 8.7 点でした.

期末試験全体のコメント

計 $30 + 20 + 20 + 20 = 90$ 点で採点しました. 平均点は $12.9 + 24.1 + 16.3 + 8.7 = 61.9$ 点でした. 答案 1 枚目の名前欄の横に $xx/90$ と書いてあれば xx 点が点数です. 得点分布は次の通りです.

得点	–44	45–54	55–69	70–84	85–
人数	8	10	24	19	7

成績の付け方

中間試験の得点を m, 期末試験の得点を f として,

$$t \coloneqq \max(m, f) * 0.6 + f * 0.6$$

を返却答案の名前の横に丸で囲って書きました. t の値によって以下の表のように成績を付けます.

t	–49	50–64	65–84	85–104	105–
成績	C−	C	B	A	A+
人数	5	10	31	15	7

今回の試験の採点や成績に関する事, その他質問・相談を受け付けますので, 気兼ねなくメールして下さい.

以上です.