現代数学基礎 BI　7 月 19 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. V を複素線形空間とし, $h\colon V\times V\to\mathbb{C}$ をその上の非退化な Hermite 内積とする.

(1) V の同型写像全体がなす集合 $\mathrm{Aut}(V) := \{\varphi\colon V\to V \mid 同型写像\}$ が写像の合成 $\circ$ を積とする群である事, つまり以下の三条件を満たすことを示せ.

(i) 任意の $\varphi,\varphi',\varphi''\in\mathrm{Aut}(V)$ に対して $\varphi\circ\varphi'\in\mathrm{Aut}(V)$ であり, $(\varphi\circ\varphi')\circ\varphi''=\varphi\circ(\varphi'\circ\varphi'')$.

(ii) 恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V\to V$ は $\mathrm{Aut}(V)$ の元で, 任意の $\varphi\in\mathrm{Aut}(V)$ に対して $\mathrm{id}_V\circ\varphi=\varphi\circ\mathrm{id}_V=\varphi$.

(iii) 任意の $\varphi\in\mathrm{Aut}(V)$ に対して元 $\varphi^{-1}\in\mathrm{Aut}(V)$ が存在して $\varphi\circ\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{id}_V$.

(2) Hermite 内積空間 (V,h) のユニタリ変換全体がなす集合

$$U(V,h) := \bigl\{\varphi\in\mathrm{Aut}(V) \mid \forall v,w\in V,\ h\bigl(\varphi(v),\varphi(w)\bigr)=h(v,w)\bigr\}$$

が $\mathrm{Aut}(V)$ の部分群である事, つまり以下の三条件を満たす事を示せ.

(i) 任意の $\varphi,\varphi'\in U(V,h)$ に対して $\varphi\circ\varphi'\in U(V,h)$.　(ii) $\mathrm{id}_V\in U(V,h)$.

(iii) 任意の $\varphi\in U(V,h)$ に対して $\varphi^{-1}\in U(V,h)$.

解答. (1) (i) 全単射の合成は全単射であり, 線形写像の合成は線形写像だから, $\varphi\circ\varphi'$ は同型写像である. 任意の $v\in V$ に対して $\bigl((\varphi\circ\varphi')\circ\varphi''\bigr)(v)=(\varphi\circ\varphi')\bigl(\varphi''(v)\bigr)=\varphi\bigl(\varphi'\bigl(\varphi''(v)\bigr)\bigr)$, $\bigl(\varphi\circ(\varphi'\circ\varphi'')\bigr)(v)=\varphi\bigl((\varphi'\circ\varphi'')(v)\bigr)=\varphi\bigl(\varphi'\bigl(\varphi''(v)\bigr)\bigr)$ だから, 写像 $(\varphi\circ\varphi')\circ\varphi''$ と $\varphi\circ(\varphi'\circ\varphi'')$ は等しい.

(ii) id_V は全単射かつ線形写像だから同型写像. 任意の $\varphi\in\mathrm{Aut}(V)$ と $v\in V$ に対して $\bigl(\mathrm{id}_V\circ\varphi\bigr)(v)=\mathrm{id}_V\bigl(\varphi(v)\bigr)=\varphi(v)$, $(\varphi\circ\mathrm{id}_V)(v)=\varphi\bigl(\mathrm{id}_V(v)\bigr)=\varphi(v)$ だから, 写像 $\mathrm{id}_V\circ\varphi$, $\varphi\circ\mathrm{id}_V$, φ は等しい.

(iii) $\varphi\in\mathrm{Aut}(V)$ は全単射なので逆写像 $\varphi^{-1}\colon V\to V$ が存在し, $\varphi\circ\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{id}_V$ を満たす. φ^{-1} は全単射であり, また φ が線形写像だから φ^{-1} も線形写像なので, φ^{-1} は同型写像.

(2) (i) $\varphi,\varphi'\in U(V,h)$ なら $\varphi,\varphi'\in\mathrm{Aut}(V)$ なので, (1) (i) より $\varphi\circ\varphi'\in\mathrm{Aut}(V)$. また任意の $v,w\in V$ に対して $h\bigl(\varphi\circ\varphi'(v),\varphi\circ\varphi'(w)\bigr)=h\bigl(\varphi\bigl(\varphi'(v)\bigr),\varphi\bigl(\varphi'(w)\bigr)\bigr)=h\bigl(\varphi'(v),\varphi'(w)\bigr)=h(v,w)$ となるので $\varphi\circ\varphi'\in U(V,h)$.

(ii) (1) (ii) より $\mathrm{id}_V\in\mathrm{Aut}(V)$ であり, また任意の $v,w\in V$ に対して $h\bigl(\mathrm{id}_V(v),\mathrm{id}_V(w)\bigr)=h(v,w)$ となるので $\mathrm{id}_V\in U(V,h)$

(iii) $\varphi\in U(V,h)$ なら $\varphi\in\mathrm{Aut}(V)$ なので, (1) (iii) より $\varphi^{-1}\in\mathrm{Aut}(V)$. また任意の $v,w\in V$ に対して $h\bigl(\varphi^{-1}(v),\varphi^{-1}(w)\bigr)=h\bigl(\varphi(\varphi^{-1})(v),\varphi(\varphi^{-1})(w)\bigr)=h\bigl(\mathrm{id}_V(v),\mathrm{id}_V(w)\bigr)=h(v,w)$ となるので $\varphi^{-1}\in U(V,h)$.

コメント. (1) を 1 点, (2) を 2 点として, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.6 点でした.

(1) について, (減点していませんが) 同型射である事を言う際に全単射である事のみ述べて, 線型写像である事について触れていない答案が若干ありました. (2) では (i), (iii) を示す代わりに “任意の $\varphi,\varphi'\in U(V,h)$ に対して $\varphi^{-1}\circ\varphi'\in U(V,h)$” だけ示しても良いです.

以上です.