現代数学基礎 BI　7 月 12 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. 実線形空間 $\mathbb{R}^3$ 上の対称双線形型式 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を, 標準基底 e_1, e_2, e_3 について

$$\big(\langle e_i, e_j\rangle\big)_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となるように定める. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が半正定値である事を示せ. また $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$(\mathbb{R}^3)^\perp \coloneqq \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \forall w \in \mathbb{R}^3,\ \langle v, w\rangle = 0\}$$

の次元を求めよ.

解答. $w_1 \coloneqq e_1 + e_2$, $w_2 \coloneqq e_1 - e_2$, $w_3 \coloneqq e_1 + e_2 + e_3$ とすると

$$\big(\langle w_i, w_j\rangle\big)_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

が成立するので, w_1, w_2, w_3 は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する直交基底である. 対角成分が全て非負だから $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は半正定値である. また $(\mathbb{R}^3)^\perp = \mathbb{R}w_3$ なので次元は 1.

コメント. 前半を 2 点, 後半を 1 点として, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.3 点でした.

証明の方針が色々ある問題でした. 前半については, $v \in \mathbb{R}^3$ の成分を置いて $\langle v, v\rangle \geq 0$ を直接計算で示す方針でも良いです. 上の解答は実質的に固有値を計算する方針です. 多かった間違いは "$\langle e_i, e_i\rangle \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ なので半正定値" しているものでした. 例えば $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = 0$ かつ $\langle e_1, e_2\rangle = 1$ の場合は $\langle e_1 - e_2, e_1 - e_2\rangle = -2$ なので, 半正定値ではありません.

後半の間違いで目立ったのは, 求める空間を標準内積 $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ に関する $\mathbb{R}^3$ での直交補空間と勘違いしたものでした.

以上です.