2022・7・12

§12. Hermite内積空間

V: $\mathbb{C}$線形空間　　$\bar{z}$: $z \in \mathbb{C}$の複素共役

§12.1. Hermite型式

Dfn. 12.1.1/2　$h: V \times V \to \mathbb{C}$

(1), (2)　hがHermite型式 $:\Leftrightarrow$ $\forall u, v, w \in V$, $\forall c, c' \in \mathbb{C}$

(i) $h(cu + c'v, w) = c \cdot h(u, w) + c' \cdot h(v, w)$ [第一変数について線形]

(ii) $h(u, cv + c'w) = \bar{c} \cdot h(u, v) + \overline{c'} h(v, w)$ [〃 二 〃 反〃]

(iii) $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$

(3) hがHermite内積 $:\Leftrightarrow$ (i), (ii), (iii)かつ

(iv) $\forall v \in V \setminus \{0\}$　$h(v, v) > 0$　(iii) $\Rightarrow h(v, v) \in \mathbb{R}$

組(V, h)をHermite内積空間という □　なので">0"に意味がある。

Eg. 12.1.4.　$\mathbb{C}^n$上の標準Hermite内積

$$\langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w_j} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

□

Rmk. Hermite型式は双線形型式ではない □

Dfn. 12.1.6.　$\dim V < \infty$,　$v_1, \dots, v_n$: Vの基底

h: V上のHermite型式

$(h(v_j, v_k))_{j,k=1}^{n} \in M(n; \mathbb{C})$　: hの行列表示。 □

Lem. 12.1.7.　hの行列表示 $H := (h(v_j, v_k))_{j,k=1}^{n}$ はHermite行列。

つまり　$H = H^*$　□

$\Leftarrow \overline{{}^tH} = {}^t\overline{H}$

§12.2 ユニタリ変換

Dfn. 12.2.1. (V, h) : Hermite 内積空間

(1) Hermite 内積 h が非退化

$:\Leftrightarrow r_h : V \to V^*,\ v \mapsto h(v, \cdot)$ が単射.

$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$　　r_h は反線形写像 [Lem. 12.1.8]

(3) h は非退化だと仮定. $f \in \mathrm{End}(V)$ が自己共役

$:\Leftrightarrow h(f(v), w) = h(v, f(w))\quad \forall v, w \in V$ □

Prp. 12.2.2. $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: 標準 Hermite 内積 : 非退化

$A \in M(n; \mathbb{C})$. $l_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 左 A 倍写像.

l_A が自己共役 $\Leftrightarrow$ A が Hermite 行列 $(A = A^*)$ □

Dfn. 12.2.3. (V, h) : Hermite 内積空間

$\varphi : V \to V$ がユニタリ変換 $:\Leftrightarrow$ 同型写像 かつ $h(\varphi(v), \varphi(w)) = (v, w)$

$\forall v, w \in V$ □

Prp. 12.2.4. $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: 標準 Hermite 内積. $A \in M(n, \mathbb{C})$

(i) $l_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ はユニタリ変換

$\Leftrightarrow$ (ii) A はユニタリ行列. つまり $A^* \cdot A = E_n$

$\Leftrightarrow$ (iii) $e_1, \dots, e_n$: $\mathbb{C}^n$ の標準基底　$Ae_1, \dots, Ae_n$ は正規直交基底

$\langle Ae_j, Ae_k \rangle = \delta_{jk}$

(:) (iii) $\Leftrightarrow \delta_{jk} = {}^t(Ae_j) \cdot \overline{Ae_k} = {}^te_j\, {}^tA \overline{A} e_k = ({}^tA \overline{A})_{jk}\quad \forall j, k$

$\Leftrightarrow {}^tA \cdot \overline{A} = E_n \Leftrightarrow$ (ii)

(i) $\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle\quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n$

$\Leftrightarrow {}^tv \cdot \overline{w} = {}^t(Av) \cdot \overline{Aw} = {}^tv \cdot {}^tA \overline{A} \cdot \overline{w}\quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n$

$\Leftrightarrow {}^tA \cdot \overline{A} = E_n$ ($\Leftarrow$: 明らか. $\Rightarrow$: $v = e_j$, $w = e_k$ とする) $\Leftrightarrow$ (ii) □

§10.4. テンソル積 (つづき)　線形空間・写像は体 $\mathbb{K}$ 上.

Thm. 10.4.1. U, V, W : 線形空間

$$V \otimes W := \bigoplus_{(v,w) \in V \times W} \mathbb{K} e(v,w) / R$$

$$R := \mathrm{span}_{\mathbb{K}} \left\{ \begin{array}{l|l} e(v+v', w) - e(v,w) - e(v',w) & v, v' \in V \\ e(v, w+w') - e(v,w) - e(v,w') & w, w' \in W \\ e(cv, w) - ce(v,w) & c \in \mathbb{C} \\ e(v, cw) - ce(v,w) & \end{array} \right\}$$

$$\otimes : V \times W \longrightarrow V \otimes W \quad : \text{双線形}$$
$$(v, w) \longmapsto \overline{e(v,w)} =: v \otimes w$$

$$\mathrm{Hom}(V \otimes W, U) \xrightarrow{\cong} \{ b : V \times W \to U \mid \text{双線形} \}$$
$$f \longmapsto (b_f(v,w) := f(v \otimes w)) \qquad \square$$

Prp. 10.4.7, 10.4.10, 10.4.11. V : 線形空間

- $(V \otimes V) \otimes V \longrightarrow V \otimes (V \otimes V)$
  $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \longmapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ は同型写像.
- $\mathbb{K} \otimes V \longrightarrow V$, $V \otimes \mathbb{K} \longrightarrow V$ 〃
  $c \otimes v \longmapsto cv$ 　 $v \otimes c \longmapsto cv$
- $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\underset{\smile}{V^{\otimes n}} := V \otimes (V \otimes \cdots \otimes (V \otimes V) \cdots)$
  $n = 0$ なら $V^{\otimes 0} := V$ 　 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ 　 $(v_i \in V)$
  すると $V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \cong V^{\otimes (m+n)}$ 　 $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $\square$

Prp. 10.4.14. V, W : 線形空間, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, W) \xrightarrow{\cong} \{ V \times \cdots \times V \to W \mid n\text{重線形写像} \}$$
$$f \longmapsto ((v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n))$$

§10.6 外積と交代型式

Dfn.10.6.4. V: 線形空間、 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$

$f: V^{\times n}\to\mathbb{K}$ が n重交代型式

$V^{\times n} = \underbrace{V\times\cdots\times V}_{n}$

$:\Longleftrightarrow$ n重線形（各変数について線形）かつ

$f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j=v_i,\dots,v_n)=0$ $(i<j)$ □

E.g.10.6.5. $V=\mathbb{K}^d$, $n\leq d$

$I=\{i_1,\dots,i_n\}\subset\{1,\dots,d\}$

$\det_I: (\mathbb{K}^d)^{\times n}\to\mathbb{K}$

$a_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{dj}\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^d$

$(a_1,\dots,a_n)\mapsto\det\begin{pmatrix}a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_n 1} & a_{i_n 2} & \cdots & a_{i_n n}\end{pmatrix}$

$M(d\times n,\mathbb{K})\ni(a_{ij})_{i,j}\mapsto(a_{i_k j})_{k,j}\in M(n,\mathbb{K})$

行列式の交代性（同じ列があれば0）から

$\det_I$ は n重交代型式 （I小行列式） □

Prp.10.6.6. V: 線形空間, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$

$\{n\text{重交代型式 } V^{\times n}\to\mathbb{K}\}\xleftarrow{1:1}\mathrm{Hom}(\Lambda^n V,\mathbb{K})$

$((v_1,\dots,v_n)\mapsto f(v_1\wedge\cdots\wedge v_n))\ \leftarrow\!\shortmid\ f$

但し $\Lambda^n V := V^{\otimes n}/W_n$,

$W_n := \mathrm{span}\{v_1\otimes\cdots\otimes v_n\in V^{\otimes n}\mid \exists i<j.\ v_i=v_j\}$

$\Lambda^n V\ni v_1\wedge\cdots\wedge v_n := \overline{v_1\otimes\cdots\otimes v_n}$ □