現代数学基礎 BI　7 月 05 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. n を正整数とし, $V = M(n;\mathbb{C})$ を複素数体上の n 次正方行列のなす線形空間とする. 写像 $b\colon V \times V \to \mathbb{C}$ を, 正方行列のトレース tr を使って $b(X,Y) := \mathrm{tr}(XY)$ $(X, Y \in V)$ で定義すると, これは対称双線形型式である. また部分空間 $W \subset V$ に対して $W^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in W, b(v,w) = 0\}$ と定めると, $W^\perp$ は V の部分空間である.

(1) b が V 上非退化である事, つまり $V^\perp = \{O\}$ となる事を示せ.

(2) 上三角行列からなる V の部分空間を T と書く. つまり

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

部分空間 $T^\perp \subset V$ の次元を求めよ.

解答. (1) (i,j) 成分が 1 で残りの成分が 0 である V の元 (行列単位) を E_{ij} で表すと, E_{ij} 達 $(1 \le i,j \le n)$ は V の基底をなす. $X \in V^\perp$ を $X = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}E_{ij}$, $x_{ij} \in \mathbb{C}$ と表すと, 任意の $1 \le k,l \le n$ に対して $b(X, E_{kl}) = 0$. 一方で

$$b(X,E_{kl}) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}\,\mathrm{tr}(E_{ij}E_{kl}) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}\,\mathrm{tr}(\delta_{j,k}E_{il}) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}\delta_{j,k}\delta_{i,l} = x_{kl}$$

だから, $X \in V^\perp$ なら全ての成分は 0, つまり $X = O$ である.

(2) b が V 上非退化なので $V = T \oplus T^\perp$. この事と $\dim V = n^2$, $\dim T = \frac{1}{2}n(n+1)$ より

$$\dim T^\perp = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

コメント. (1) は 2 点, (2) は 1 点として, 3 点満点で採点しました. 平均点は 1.6 点でした.

(1) は約半分の人は解答と同様の方針で解けていました. 一般の双線形型式 $b\colon V \times W \to \mathbb{K}$ に関する講義ノートの命題 10.2.13 (2) を適用しようとしたのか, "$W = V$ だから $\dim V = \dim W$ なので b は非退化" としている答案が目立ちましたが, 当然間違いです ($W = V$ でも, 任意の $v, v' \in V$ に対して $b(v,v') = 0$ とすれば, この b は退化).

(2) についても正答率は半分程でした. 解答のように解く以外には, 具体的に $T^\perp$ の元を記述して基底を求める事もできます.

以上です.