2022・7・5

§11. 実内積空間

§11.1. 実対称形式

V: 実線形空間, $n := \dim V < \infty$

$b: V \times V \to \mathbb{R}$: 対称形式 := 対称双線形形式

Dfn. Vの基底$v_1, \dots, v_n$がbに関する直交基底 :⟺ $i \neq j$ なる $(v_i, v_j) = 0$ □

Thm. 11.1.1. (標準形, 慣性律) b: V上の任意の対称形式

(1) 直交基底 $v_1, \dots, v_n$ であって

$$\left(b(v_i, v_j) \right)_{i,j=1}^{n} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} r\text{コ} \\ s\text{コ} \\ t\text{コ} \end{array} =: L(r, s, t)$$

bの標準形

となるものが存在する.

(2) $w_1, \dots, w_n$ が別の直交基底で

$$\left(b(w_i, w_j) \right)_{i,j=1}^{n} = L(r', s', t')$$

をみたすなら, $(r', s', t') = (r, s, t)$ □

Dfn. 11.1.2. b: V上の対称形式, $L(r, s, t)$: bの標準形

(1) bが正定値 :⟺ $\forall v \in V \setminus \{0\}$ $b(v, v) > 0$

(2) 〃 半正 〃 :⟺ 〃 〃 ≥ 0

(3) 〃 不定値 :⟺ $\exists v, w \in V \setminus \{0\}$, $b(v, v) > 0 > b(w, w)$

(4) bの符号数 := $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ □

Eg. 11.1.3 (1) $\mathbb{R}^n$上のEuclid内積は標準基底について $(\langle e_i, e_j \rangle)_{ij} = L(n, 0, 0)$

正定値で, 符号数は $(n, 0)$

(2) $(b(e_i, e_j))_{ij} = L(1, n-1, 0)$ で定まる b (Lorentz計量) は不定値 □

$\leftarrow V^{\perp} := \{v' \in V \mid \forall v \in V, b(v, v') = 0\}$

Cor. 11.1.4. bは非退化 $(\Leftrightarrow V^{\perp} = \{0\})$
$\Leftrightarrow$ bは正定値 又は 負定値 $\Leftrightarrow$ bの符号数は$(n,0)$か$(0,n)$ $\square$

§11.2. 実内積空間

V: 実線形空間　　　　$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

Dfn. 11.2.1. (1) V上の正定値対称双線形式を内積と呼ぶ
(2) Vとその内積の組を内積空間　〃
(実計量空間)
(3) $v \in V$のノルム $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\square$

Prp. 11.2.2. (Schwarzの不等式, 三角不等式)
$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: 内積空間　$v, w \in V$
$\|v\| \cdot \|w\| \geq |\langle v, w \rangle|$,　$\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v - w\| \leq \|v\| + \|w\|$ $\square$

Thm. 11.2.3. (Gram-Schmidt 直交化)
$V \neq \{0\}$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: 内積空間
$u_1 \in V \setminus \{0\}$　$v_1 := u_1 / \|u_1\|$.
$u_2 \in V \setminus \mathrm{Span}\{v_1\}$　$w_2 := u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1$,　$v_2 := w_2 / \|w_2\|$
$\vdots$
$u_r \in V \setminus \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_{r-1}\}$, $w_r := u_r - \sum_{i=1}^{r-1} \langle u_r, v_i \rangle v_i$, $v_r := w_r / \|w_r\|$
$\vdots$
とすると, 各ステップで $\|w_r\| \neq 0$ であり, $v_1, \ldots, v_r$は$(\cdot, \cdot)$の
正規直交系. つまり $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ が成立する $\square$

Dfn.11.28. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$: 実内積空間
$\varphi: V \to W$ が 計量同型写像(又は 等長線形写像)
:$\Leftrightarrow$ φは(線形)同型写像 かつ
$\forall v, v' \in V \quad \langle \varphi(v), \varphi(v') \rangle_W = \langle v, v' \rangle_V$
特に $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V) = (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ の時. 直交変換という. □

Prp.11.29. $n = \dim V < \infty$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$: V上の内積, $\varphi: V \to V$: 直交変換
⇒ 任意の正規直交基底に関する φの行列表示 A は直交行列.
つまり $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = E_n$

∵ $v_1, \dots, v_n$: 正規直交基底. $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$
$$\varphi(v_k) = \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ik}$$
$$\begin{aligned}\delta_{k\ell} = \langle v_k, v_\ell \rangle &= \langle \varphi(v_k), \varphi(v_\ell) \rangle \\ &= \langle \textstyle\sum_i v_i a_{ik}, \sum_j v_j a_{j\ell} \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i,j} a_{ik} a_{j\ell} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i,j} a_{ik} a_{j\ell} \delta_{ij} \\ &= \textstyle\sum_i a_{ik} a_{i\ell} = ({}^tA \cdot A)_{k\ell}\end{aligned}$$
□

§10.4 テンソル積

Thm.10.4.1. V, W : 線形空間 (体 $\mathbb{K}$ 上)
$S := \bigoplus_{(v,w) \in V \times W} \mathbb{K} e_{(v,w)}$: 基底が $V \times W$ でラベル付け
$R := \mathrm{Span}\{ e(v+v', w) - e(v, w) - e(v', w),$ された線形空間
$e(v, w+w') - e(v, w) - e(v, w')$
$e(cv, w) - ce(v, w)$, $e(v, cw) - ce(v, w)$
$\mid v, v' \in V, w, w' \in W, c \in \mathbb{K} \} \subset S$
$V \otimes W := S/R$: テンソル積

(1) $\otimes : V\times W \to V\otimes W,\quad (v,w)\mapsto \overline{e(v,w)} =: v\otimes w$
は双線形写像

(2) $\forall U$: 線形空間
$$\mathrm{Hom}(V\otimes W, U) \to \{ V\times W \to U \mid 双線形\}$$
$$f \mapsto (b_f : (v,w)\mapsto f(v\otimes w))$$
は全単射.

(3) $b : V\times W \to U$: 双線形. から (2) の全単射で定まる
$f\in \mathrm{Hom}(V\otimes W, U)$ は、図式
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "b"] & \\ V\otimes W \arrow[r, dashed] & U \end{tikzcd}$$
を可換にする唯一の線形写像 □

E.g.10.4.3. $v, v' \in V,\ w, w' \in W,\ c, c' \in \mathbb{K}$
$$(cv + c'v')\otimes w = c(v\otimes w) + c'(v'\otimes w)$$
$$v\otimes (cw + c'w') = c(v\otimes w) + c'(v\otimes w')$$ □

Lem.10.4.4. $v_i\ (i\in I)$: Vの基底, $w_j\ (j\in J)$: Wの基底
$\Rightarrow v_i\otimes w_j\ \ ((i,j)\in I\times J)$: $V\otimes W$の基底
特に $\dim V, \dim W < \infty \Rightarrow \dim(V\otimes W) = \dim V\cdot \dim W$
□