現代数学基礎 BI　6 月 28 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. n を 2 以上の整数とし, $V=\mathbb{Q}^n$ を有理数体上の n 次元数ベクトル空間とする. また $e_1,\dots,e_n$ を単位ベクトルからなる V の標準基底とし, $W\subset V$ を $w:=e_1+\cdots+e_n\in V$ が生成する 1 次元部分空間とする. 商空間 V/W に関して, $v\in V$ の同値類を $[v]\in V/W$ と書く.

(1) 任意の $v\in V$ に対して, $[v]=0\Leftrightarrow v\in W$ を示せ.

(2) $[e_1-e_2],[e_2-e_3],\dots,[e_{n-1}-e_n]$ が V/W の基底である事を示せ.

(3) $[e_1]\in V/W$ を (2) の基底の一次結合で表せ.

解答. (1) V 上の二項関係 $\sim$ を $v,v'\in V$ について $v\sim v':\Leftrightarrow v-v'\in W$ で定めると, これは同値関係で, V/W は集合としては $V/\sim$ で与えられる. そして $v\in V$ に対して $[v]=\{v'\in V\mid v'\sim v\}$ である. また V の零元を 0_V と書くと, V/W の零元は $0:=[0_V]$. 従って

$$[v]=0\iff[v]=[0_V]\iff v\sim 0_V\iff v-0_V\in W\iff v\in W.$$

(2) $\dim(V/W)=\dim V-\dim W=n-1$ だから, $[e_i-e_{i+1}]$ 達が一次独立である事を示せば十分. $\sum_{i=1}^{n-1}c_i[e_i-e_i+1]=0$, $c_i\in\mathbb{Q}$ とすると, $\sum_{i=1}^{n-1}c_i[e_i-e_i+1]=[\sum_{i=1}^{n}c_i(e_i-e_{i+1})]$ だから, (1) より $\sum_{i=1}^{n-1}c_i(e_i-e_{i+1})\in W$. よって適当な $c\in\mathbb{Q}$ を用いて

$$\sum_{i=1}^{n-1}c_i(e_i-e_{i+1})=c(e_1+\cdots+e_n)$$

と書ける. e_i 達は基底なので $c_1=c$, $c_2-c_1=c$, $c_3-c_2=c$, …, $c_{n-1}-c_{n-2}=c$, $-c_{n-1}=c$. この連立方程式を解くと $c_i=ic$ $(i=1,\dots,n-2)$, $c_{n-1}=(n-1)c=-c$ となって, $c=c_1=\cdots=c_n=0$ が解. 以上より $[e_i-e_{i+1}]$ 達は一次独立.

(3) $[e_1]=\sum_{i=1}^{n-1}c_i[e_i-e_{i+1}]$, $c_i\in\mathbb{Q}$ と置く. $0=\sum_{i=1}^{n-1}c_i[e_i-e_{i+1}]-[e_1]=[(c_1-1)e_1+\sum_{i=2}^{n-1}(c_i-c_{i-1})e_i-c_{n-1}e_n]$ なので, (1) より適当な $c\in\mathbb{Q}$ を用いて

$$(c_1-1)e_1+\sum_{i=2}^{n-1}(c_i-c_{i-1})e_i-c_{n-1}e_n=c(e_1+\cdots+e_n)$$

と書ける. これから連立方程式 $c_1-1=c$, $c_2-c_1=c$, $c_3-c_2=c$, …, $c_{n-1}-c_{n-2}=c$, $-c_{n-1}=c$ が得られて, 解くと $c_i=ic+1$ $(i=1,\dots,n-2)$, $c_{n-1}=(n-1)c+1=-c$ となる. よって解は $c=-\frac{1}{n}$, $c_i=1-\frac{i}{n}$ $(i=1,\dots,n)$ となって, 答えは

$$[e_1]=\sum_{i=1}^{n-1}\Bigl(1-\frac{i}{n}\Bigr)[e_i-e_{i+1}].$$

コメント. 各小問を 1 点とし, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.0 点でした.

(1) はほとんどの方が出来ていましたが, 同値の矢印で結んだだけで言葉による説明が全く無いものが多かったです. (2) では, “$e_1-e_2,\dots,e_{(n-1)}-e_n$ が V で一次独立であるので, それらの V/W での像も一次独立である” という不正確な導出をしている方が多かったです. また一次独立性を示しただけで, それらが V/W を生成する事を説明していない答案も若干ありました. (3) は半分弱の方が正答していました.

以上です.