2022・6・28

§10. 双線形写像

☆明日 16:30〜 509で質問受付.
来週からは水曜 12:30〜13:30, 16:30〜17:30. 509)

線形空間・写像は体K上.

問(Rep.10.3.8) $b: V\times V\to K$: 対称双線形形式, $\dim V<\infty$,
$W\subset V$: 部分空間

(0) $W^\perp := \{v\in V \mid \forall w\in W,\ b(v,w)=0\}$ はVの部分空間

(1) $i: W\to V$: 包含写像. $i^*: V^*\to W^*$: iの双対写像

$r_b: V\to V^*$: $r_b(v)(v') := b(v,v')$

$\Rightarrow\ W^\perp = \mathrm{Ker}(i^*\circ r_b)$

(2) $b_W := b|_{W\times W}$: W上の対称双線形形式

(i) b_Wは非退化 $\Longleftrightarrow$ (ii) $V=W\oplus W^\perp$ $\Longleftrightarrow$ (iii) $W\cap W^\perp=\{0\}$

特にbが非退化 $\Longleftrightarrow V^\perp=\{0\}$

$V\to V^*\to W^*$

∵ (1) $\mathrm{Ker}(i^*\circ r_b) = \{v\in V \mid i^*(r_b(v))=0\in W^*\}$

$= \{v\in V \mid \forall w\in W,\ i^*(r_b(v))(w)=0\}$

$= \{v\in V \mid$ 〃 $r_b(v)(\underbrace{i(w)}_{=w})=0\}$

$= \{v\in V \mid$ 〃 $b(v,w)=0\} = W^\perp$

(2) (i) $\overset{10.2.13}{\Longleftrightarrow}$ $r_{b_W}: W\to W^*$ が同型 $\Longleftrightarrow$ $(g: W \xrightarrow{i} V \xrightarrow{r_b} V^* \xrightarrow{i^*} W^*)$ が同型

$\Longleftrightarrow$ $(i^*\circ r_b)\circ i: W\to V\to W^*$ が同型

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(i^*\circ r_b)\oplus W = V$ $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) は部分空間の直和の定義から.

(iii) $\Rightarrow$ $(g: W \xrightarrow{i} V \xrightarrow{i^*\circ r_b} W^*)$ は単射

$\Rightarrow$ gは同型 $\overset{10.2.13}{\Longleftrightarrow}$ (i) □

$\dim W^* = \dim W < \infty$

§10.2 双線形型式

Dfn.10.1.1/10.2.1. U, V, W：線形空間

写像 $f: U\times V \to W$, $(u,v)\mapsto f(u,v)$ が双線形

$:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall u\in U,\ f(u,\cdot): V\to W \text{ が線形} \\ \text{かつ } \forall v\in V\ \ f(\cdot,v): U\to W \ \ 〃 \end{cases}$

特に $W=\mathbb{K}$ の場合の双線形写像を双線形型式という。 □

E.g. (1) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $U=V=\mathbb{R}^n \ni u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}$, $W=\mathbb{R}$

(10.2.3,4) (Euclid)内積 $\langle u,v\rangle := u_1v_1+\cdots+u_nv_n \in \mathbb{R}$

は双線形型式 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

(2) $A=(a_{ij})_{i,j}\in M(m,n;\mathbb{K})$, $U=\mathbb{K}^m$, $V=\mathbb{K}^n$, $W=\mathbb{K}$

$b_A: \mathbb{K}^m\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$, $(u,v)\mapsto {}^t u\cdot A\cdot v$

は双線形型式。 $=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n u_i a_{ij} v_j$

(3) V：線形空間. V^*：線形空間

$\langle\ ,\ \rangle: V\times V^*\to\mathbb{K}$, $\langle v,f\rangle := f(v)$

は双線形型式. (V と V^* の標準双線形型式) □

canonical pairing

Prp.10.2.6. $b: V\times W\to\mathbb{K}$：双線形型式.

$\forall w\in W$ $r_b(w): V\to\mathbb{K}$ $r_b(w)(v)=b(v,w)$

とすると $r_b(w)\in V^*$. 更に

$r_b: W\to V^*$, $w\mapsto r_b(w)$

とすると $r_b\in \mathrm{Hom}(W,V^*)$ □

Prp.10.2.7. $b: V\times W\to\mathbb{K}$：同上

$\forall v\in V$, $l_b(v): W\to\mathbb{K}$, $l_b(v)(w) := b(v,w)$

とすると $l_b(v)\in W^*$. 更に $l_b: V\to W^*$, $v\mapsto l_b(v)$

〃 $l_b\in\mathrm{Hom}(V,W^*)$ □

Dfn 10.2.8. $b: V \times W \to \mathbb{K}$：双線形

(1) b は W上で非退化 :$\Leftrightarrow$ $r_b \in \mathrm{Hom}(W, V^*)$ が単射

(2) b は V 〃 :$\Leftrightarrow$ $l_b \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$ 〃 □

Prp. 10.2.13. & Cor. 10.2.15. $b: V \times W \to \mathbb{K}$：双線形、$\dim V, \dim W < \infty$

(1) $\mathrm{rk}\, r_b = \mathrm{rk}\, l_b$

(2) $\dim V = \dim W$ なら

b は V上で非退化 $\Leftrightarrow$ l_b は同型 $\Leftrightarrow$ r_b は同型 $\Leftrightarrow$ b は W上非退化

∵ (1) $v_1, \ldots, v_n$：V の基底　$v_1^*, \ldots, v_n^*$：V^* の基底

$w_1, \ldots, w_m$：W 〃　$w_1^*, \ldots, w_m^*$：W^* 〃

$r_b: W \to V^*$ の行列表示、$R = (r_{ij})_{i,j}$ は

$r_b(w_j) = \sum_{i=1}^n v_i^* r_{ij}$

$r_b(w_j)(v_i) = b(v_i, w_j)$　$(\sum_i v_i^* r_{ij})(v_i) = r_{ij}$

$\therefore\ r_{ij} = b(v_i, w_j)$

$l_b: V \to W^*$ の行列表示、$L = (l_{ij})_{i,j}$ は

$l_b(v_j) = \sum_{i=1}^m w_i^* l_{ij}$.

$l_b(v_j)(w_i) = b(v_j, w_i)$,　$(\sum_i w_i^* l_{ij})(w_i) = l_{ij}$

$\therefore\ l_{ij} = b(v_j, w_i)$

$\therefore\ L = {}^tR$.　$\therefore\ \mathrm{rk}\, r_b = \mathrm{rk}\, R = \mathrm{rk}\, L = \mathrm{rk}\, l_b$

(2) V上非退化 $\Leftrightarrow$ l_b 単射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}\, l_b = \dim W^*$ $\Leftrightarrow$ l_b：同型,

W 〃 $\Leftrightarrow$ r_b 単射　$\dim V = \dim\ker l_b + \mathrm{rk}\, l_b$ と

$\Leftrightarrow$ r_b 同型.　$\mathrm{rk}\, l_b \leq \dim W^*$ より

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}\, r_b = \dim V^*$

と(1)及び $\dim V^* = \dim V = \dim W = \dim W^*$ より.

<u>Dfn. 10.2.10.</u> $b: V\times W\to \mathbb{K}$: 双線形, $\dim V, \dim W<\infty$
$v_1,\dots,v_m$: Vの基底. $w_1,\dots,w_n$: Wの基底.
$(b(v_i,w_j))_{ij}\in M(m,n;\mathbb{K})$ をbの行列表示という □

<u>Prp. 10.2.16.</u> 上の設定でbがV上非退化かつW上非退化かつ$\dim V=\dim W$
$\Leftrightarrow$ 任意の基底について、bの行列表示は可逆正方行列. □

§10.3. 対称双線形型式

<u>Dfn. 10.3.1.</u> $b: V\times V\to W$. 双線形, が 対称.
$:\Leftrightarrow$ $\forall v, v'\in V$ $b(v,v')=b(v',v)$
特に $W=\mathbb{K}$ の場合のbを対称双線形型式という □

<u>E.g. 10.3.2.</u> $S=(s_{ij})_{i,j=1}^{n}$: 対称行列.
$b_S: \mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$, $b_S(v,w):={}^t v\cdot S\cdot w$
は対称双線形型式. □

<u>Lem. 10.3.4.</u> $b: V\times V\to\mathbb{K}$. 対称双線形, $\dim V<\infty$.
$\Rightarrow$ 任意の基底に関するbの行列表示は対称行列. □

<u>Dfn.</u> 対称双線形型式 $b: V\times V\to\mathbb{K}$ が非退化
$:\Leftrightarrow$ V上非退化 ($\Leftrightarrow$ r_bが単射 $\Leftrightarrow$ l_bが単射) □