現代数学基礎 BI　6 月 21 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. n を正の整数とし, $V=\mathbb{C}^n$ を複素数体上の n 次元数ベクトル空間とし, V^* をその双対空間とする. また n 次正方行列

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in M(n;\mathbb{C})$$

が定める V の自己同型を f と書き, f の双対写像を $f^* \in \mathrm{End}(V^*)$ と書く.

(1) $e_1,\dots,e_n \in V$ を単位ベクトルがなす標準基底とし, $e_1^*.\dots,e_n^* \in V^*$ をその双対基底とする. $f^* \in \mathrm{End}(V^*)$ の $e_1^*.\dots,e_n^*$ に関する行列表示を求めよ.

(2) f^* を n 回合成した写像 $(f^*)^n := f^* \circ \cdots \circ f^* \colon V^* \to V^*$ が零写像である事を示せ.

解答. (1) $f \in \mathrm{End}(V)$ の標準基底 $e_1,\dots,e_n$ に関する行列表示は J で, f^* の双対基底に関する行列表示はその転置行列になるから, 答えは

$${}^tJ = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 正方行列 A の左掛算写像を l_A と書くと $(l_A)^n = l_{A^n}$. (2) より $f^* = l_{{}^tJ}$ であり, また $({}^tJ)^n = O$ なので,

$$(f^*)^n = (l_{{}^tJ})^n = l_{({}^tJ)^n} = l_O = 0.$$

コメント. (1) を 2 点, (2) を 1 点で, 計 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.6 点でした.

(1) については殆どの方が正しく表現行列を求めていましたが, 説明を省略して答えだけを書いている答案は減点しました. また (2) に関して, 減点はしていませんが, f^* と (1) で求めた表現行列を $=$ で結んで式変形をしている方がいました. 解答のように線型写像とその表現行列を区別した形で書いて議論して下さい.

以上です.