2022・6・20

§9. 商空間と準同型定理

問(例.9.33) 線形写像 $tr: M(n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ の核を

$$\mathfrak{sl}(n;\mathbb{K}) := \mathrm{Ker}(tr) = \{A \in M(n;\mathbb{K}) \mid tr(A)=0\}$$

の次元を、準同型定理を用いて求めよ。

∵ $\forall c \in \mathbb{K}$ に対して $D := (c\delta_{i,1}\delta_{j,1})_{i,j=1}^{n}$, $tr(D)=c$ なので tr は全射.
準同型定理から $\overline{tr}: M/\mathfrak{sl} \simeq \mathbb{K}$

$\therefore \dim M - \dim(\mathfrak{sl}) = 1 \qquad \therefore \dim(\mathfrak{sl}) = n^2-1$ □

§9.1 商空間

Lem.9.1.1. V:線形空間　$W \subset V$:部分空間

V上の二項関係 $\sim$ を

$$v \sim v' :\Leftrightarrow v - v' \in W \quad (v, v' \in V)$$

で定めると、これは同値関係、つまり

(i) $\forall v \in V \quad v \sim v$ (反射律)

(ii) $\forall v, v' \in V \quad v \sim v' \Rightarrow v' \sim v$ (対称律)

(iii) $\forall v, v', v'' \in V \quad v \sim v'$ かつ $v' \sim v'' \Rightarrow v \sim v''$ (推移律)

∵ (i)は $\exists 0 \in V$、(ii)は $\exists -v \in V$ (iii) Vの和の結合律と $v + (-v) = 0$ の帰結 □

Thm.9.1.2 / Dfn.9.1.4. $\sim$による商集合を $V/W := V/\sim$ と書き、

$v \in V$の同値類を $\overline{v} := \{v' \in V \mid v' \sim v\}$ と書くと、

$$\overline{v} + \overline{w} := \overline{v + w} \quad (v, w \in V)$$

$$c.\overline{v} := \overline{cv} \quad (v \in V,\ c \in \mathbb{K})$$

$$0_{V/W} := \overline{0_V}$$

によって $(V/W, +, \cdot, 0_{V/W})$ は線形空間になる。

これをVの部分空間Wによる商空間と呼ぶ。 □

∵ 和がwell-definedである事

$v \sim v'$, $w \sim w'$ をみたす $v, v', w, w' \in V$ に対して $\overline{v} + \overline{w} = \overline{v'} + \overline{w'}$ を示す。

$v - v'$, $w - w' \in W$ より

$$(v + w) - (v' + w') = (v - v') + (w - w') \in W$$

$$\therefore\ v + w \sim v' + w' \qquad \therefore\ \overline{v + w} = \overline{v' + w'}$$

・スカラー倍もwell-defined
・線形空間の公理

} 略 □

Prp. 9.1.5. $V \supset W$：線形空間と部分空間
$p : V \to V/W,\quad v \mapsto \bar{v}$
は全射線形写像で $\mathrm{Ker}\, p = W$. これを商空間への標準全射という.
// 射影

(証) $V/W = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ だから p は全射.
$v, v' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\overline{cv + c'v'} = c\bar{v} + c'\bar{v'}$ より p は線形
$\mathrm{Ker}\, p = \{v \in V \mid \bar{v} = \bar{0}\} = \{v \in V \mid v \sim 0\} = \{v \in V \mid v - 0 \in W\} = W$ □

Lem. 9.1.6. $V = U \oplus W$：線形空間とその部分空間への直和分解
$p : V \to V/W$：標準全射.
$\Rightarrow\ p|_U : U \to V/W$ は同型写像

(証) $\mathrm{Ker}(p|_U) = (\mathrm{Ker}\, p) \cap U = W \cap U = \{0\}$ より $p|_U$ は単射.
p は全射なので $\forall x \in V/W, \exists v \in V, x = p(v)$
$V = U + W$ より $v = u + w\ \ \exists u \in U\ \exists w \in W.$
$\mathrm{Ker}\, p = W$ より $x = p(v) = p(u) + p(w) = p(u)$ よって $p|_U$ は全射. □
p は線形なので、部分空間への制限 $p|_U$ も線形

Cor. 9.1.7. $V \supset W$：線形空間と部分空間, $\dim V < \infty$
$v_1, \dots, v_m$：W の基底　$v_1, \dots, v_m, \dots, v_n$：$V$ の基底
$\Rightarrow\ \overline{v_{m+1}}, \dots, \overline{v_n}$ は V/W の基底.
特に $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$ □

§9.2. 商空間の普遍性

Thm. 9.2.1. $V \supset W$：線形空間と部分空間，$p: V \to V/W$：標準全射
$f: V \to V'$：線形写像
この時 $f(W) = 0 \iff \exists$線形 $\bar{f}: V/W \to V'$ s.t. $\bar{f} \circ p = f$
また、この条件の一方が成立する時．$\bar{f}$は一意に定まる．
$\bar{f}$をfが誘導する線形写像という．

☺ $(\Rightarrow)$ $\forall x \in V/W$ $\exists v \in V,\ x = p(v) = \bar{v}.$
$\bar{f}(x) := f(v)$ によって写像 $\bar{f}: V \to V/W$ は well-defined．
実際 $v' \in V,\ \bar{v'} = \bar{v}$ なる $v' - v \in W$ だから
$f(v') - f(v) = f(v' - v) = 0 \quad \therefore f(v') = f(v)$
$\forall v \in V$ に対して $(\bar{f} \circ p)(v) = \bar{f}(\bar{v}) = f(v)$ なので $\bar{f} \circ p = f$．
$\bar{f}$の線形性も示せる．(略)
$(\Leftarrow)$ $\forall w \in W$ $f(w) = \bar{f}(p(w)) = \bar{f}(0) = 0.$
(一意性) $g \in \mathrm{Hom}(V/W, V')$ が $g \circ p = f$ をみたせば
$\forall x = \bar{v} = p(v) \in V/W$ $g(x) = g(p(v)) = f(v) = \bar{f}(x) \quad \therefore g = \bar{f}$ □

§9.3. 準同型定理

Thm. 9.3.1. $f: V \to V'$ 線形写像
$\Rightarrow \bar{f}: V/\mathrm{Ker} f \to \mathrm{Im} f,\quad \bar{v} \mapsto f(v)$
は well-defined な線形写像で、更に同型写像． □

☺ Thm. 9.2.1 を $W = \mathrm{Ker} f$ に適用して、全射準同型
$\bar{f}: V/\mathrm{Ker} f \to \mathrm{Im} f,\ \bar{f}(\bar{v}) = f(v)$ が得られる．
$\mathrm{Ker} \bar{f} = \{\bar{v} \in V/\mathrm{Ker} f \mid f(v) = 0\} = \{\bar{v} \mid v \in \mathrm{Ker} f\} = \{0\}$ は単射 □