2022・6・14

§8 線形双対

今日以降は $\mathbb{K}$: 任意の体 (講義ノート§1.5)

<u>問13.1.3.</u> $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. $V := \mathbb{K}[x]^{\leq n} = \{n$次以下の多項式$\}$

$D := \frac{d}{dx} \in \mathrm{End}(V)$ $\quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} f_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i f_i x^{i-1}$

$1, x, \dots, x^n$: Vの基底.

双対写像 $D^* \in \mathrm{End}(V^*)$の双対基底に関する行列表示は?

㊟ $x^0, x^1, \dots, x^n \in V$ の双対基底を $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \in V^*$と書く

$D(x^j) = j x^{j-1}$, $\xi_i(x^i) = \delta_{i,j}$ より

$$
\begin{aligned}
(D^*(\xi_i))(x^j) &= \xi_i(D(x^j)) = \xi_i(j x^{j-1}) \\
&= j \cdot \delta_{i,j-1} = (i+1)\delta_{i+1,j} = (i+1)\xi_{i+1}(x^j)
\end{aligned}
$$

よって $D^*(\xi_i) = \begin{cases} (i+1)\xi_{i+1} & (i \leq n-1) \\ 0 & (i = n) \end{cases}$

行列表示は $(D^*(\xi_0)\ D^*(\xi_1) \cdots D^*(\xi_{n-1})\ D^*(\xi_n))$

$$
\begin{aligned}
&= (\xi_1\ \ 2\xi_2\ \cdots\ n\xi_n\ \ 0) \\
&= (\xi_0\ \xi_1 \cdots \xi_n)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & n \quad 0 \end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

これは確かにDの行列表示

$$
(D(x^0)\ D(x^1) \cdots D(x^n)) = (x^0\ x^1 \cdots x^n)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}
$$

の転置. □

§8.1. 双対空間

Dfn.8.1.1. V : $\mathbb{K}$上の線形空間

(1) 線形写像 $f: V \to \mathbb{K}$ を V上の線形形式という.

(2) $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) = \{V上の線形形式\}$ をVの双対空間という □

Thm.8.1.7. V : 有限次元線形空間 $n := \dim V$

$v_1, \dots, v_n$: Vの基底.

$\Rightarrow$ $v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*$ を

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

で定めると、これはV^*の基底. 特に $\dim V^* = \dim V$. □

Dfn.8.1.8. $v_1^*, \dots, v_n^*$ を $v_1, \dots, v_n$ の双対基底という.

(8.1.7の証明)

$\forall f \in V^*$ $a_i := f(v_i) \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, n)$

$f = \sum_{i=1}^n a_i v_i^*$ よって $\langle v_1^*, \dots, v_n^* \rangle = V^*$

[∵ $\forall j = 1, \dots, n$ $f(v_j) = a_j = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i v_i^*(v_j)$

$= (\sum_{i=1}^n a_i v_i^*)(v_j)$

基底の像が等しいので $f = \sum_{i=1}^n a_i v_i^*$]

また $\sum_{i=1}^n a_i v_i^* = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n$. よって$v_i^*$達は一次独立.

[∵ $\forall j = 1, \dots, n$ $0 = 0(v_j) = (\sum_{i=1}^n a_i v_i^*)(v_j) = a_j$

□

§8.2. 双対写像

$f(v) \in W$
$\therefore \varphi(f(v)) \in \mathbb{K}$
$\therefore f^*(\varphi) : V \to \mathbb{K}$

Prp. 8.2.1. $f : V \to W$ 線形写像

(1) $\varphi \in W^*$ に対し $f^*(\varphi) \in V^*$ が次で定まる.

$$(f^*(\varphi))(v) := \varphi(f(v)) \quad (v \in V)$$

(2) 線形写像 $f^* : W^* \to V^*$ が対応 $\varphi \mapsto f^*(\varphi)$ で定まる. □

Dfn. 8.2.2. f^* を f の双対写像と呼ぶ.

(8.2.1の証明)

(1) 写像 $f^*(\varphi) : V \to \mathbb{K}$ が線形である事を示せば良い.

$\forall v, v' \in V,\ \forall c, c' \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}(f^*(\varphi))(cv + c'v') &= \varphi(f(cv + c'v')) && [f^*(\varphi)\text{の定義}] \\ &= \varphi(c \cdot f(v) + c' \cdot f(v')) && [f\text{の線形性}] \\ &= c \cdot \varphi(f(v)) + c' \cdot \varphi(f(v')) && [\varphi \quad 〃 \quad] \\ &= c \cdot f^*(\varphi)(v) + c' \cdot f^*(\varphi)(v') && [f^*(\varphi)\text{の定義}]\end{aligned}$$

(2) 写像 $f^* : W^* \to V^*$ が線形である事を示せば良い.

$\forall \phi, \phi' \in W^*,\ \forall c, c' \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V$

$$\begin{aligned}(f^*(c\phi + c'\phi'))(v) &= (c\phi + c'\phi')(f(v)) && [f^*(\cdots)\text{の定義}] \\ &= c \cdot \phi(f(v)) + c' \cdot \phi'(f(v)) && [\text{線形写像の和・スカラー倍}] \\ &= c \cdot f^*(\phi)(v) + c' \cdot f^*(\phi')(v) && [f^*(\cdots)\text{の定義}] \\ &= (c \cdot f^*(\phi) + c' \cdot f^*(\phi'))(v) && [\text{和・スカラー倍}]\end{aligned}$$

よって $f^*(c\phi + c'\phi') = c \cdot f^*(\phi) + c' \cdot f^*(\phi')$ □

Prp. 8.2.4. (1) 線形空間 V に対し $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$
(2) 線形写像 $f: U \to V$ と $g: V \to W$ に対し $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
(3) 〃 $f, g: V \to W$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対し
$(cf + c'g)^* = c \cdot f^* + c' \cdot g^*$ □

Thm. 8.2.6. V, W: 有限次元線形空間 $f: V \to W$ 線形写像
$B_V = (v_1, \dots, v_n)$: V の基底.
$B_W = (w_1, \dots, w_m)$: W 〃 .
$A \in M(m, n; \mathbb{K})$: f の B_V, B_W に関する行列表示.
$B_V^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$: B_V の双対基底
$B_W^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$: B_W 〃
⇒ 双対写像 $f^*: W^* \to V^*$ の B_W^*, B_V^* に関する行列表示は
A の転置 ${}^tA$

$f^*: W^* \to V^*$
dim: m n
より $B \in M(n, m; \mathbb{K})$

(∵) $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ とすると
$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m w_i a_{ij}$$
求める行列表示を $B = (b_{kl})_{1 \le k \le n, 1 \le l \le m}$ とすると
$$f^*(w_l^*) = \sum_{k=1}^n v_k^* b_{kl}$$
$\forall j = 1, \dots, n$
$$(f^*(w_l^*))(v_j) = w_l^*(f(v_j)) \quad [f^*(w_l^*) \text{ の定義}]$$
$$= w_l^*\left(\sum_{i=1}^m w_i a_{ij}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^m w_l^*(w_i) a_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^m \delta_{l,i} a_{ij} = a_{lj}$$
$$\left(\sum_{k=1}^n v_k^* b_{kl}\right)(v_j) = \sum_{k=1}^n v_k^*(v_j) b_{kl}$$
$$= \sum_{k=1}^n \delta_{k,j} b_{kl} = b_{jl}$$
∴ $b_{jl} = a_{lj}$ □