現代数学基礎 BI　中間試験解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. $\mathbb{C}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{C}^4$ を考える．その標準基底を $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書く．また a をあなたの学生番号の下 1 桁の数とする．例えば学生番号が 062106789 なら $a = 9$ である．

(1) $e_1 + e_2, e_1 - e_2, ae_3 + e_4, e_3 - e_4$ が $\mathbb{C}^4$ の基底であることを示せ．

(2) 次の行列 A による左掛算写像 $l_A\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, $l_A(v) \coloneqq Av$ について, (1) の基底に関する l_A の行列表示を求めよ．

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

解答. (1) $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ として,

$$\begin{aligned} & c_1(e_1 + e_2) + c_2(e_1 - e_2) + c_3(ae_3 + e_4) + c_4(e_3 - e_4) = 0 \\ \iff & (c_1 + c_2)e_1 + (c_1 - c_2)e_2 + (ac_3 + c_4)e_3 + (c_3 - c_4)e_4 = 0 \\ \iff & c_1 + c_2 = c_1 - c_2 = ac_3 + c_4 = c_3 - c_4 = 0 \\ \iff & c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \quad (a \neq -1 \text{ を用いた}) \end{aligned}$$

より, 問題の元達は一次独立．$\dim \mathbb{C}^4 = 4$ なのでこれらは $\mathbb{C}^4$ の基底になる．

(2) $u_1 \coloneqq e_1 + e_2$,$u_2 \coloneqq e_1 - e_2$, $u_3 \coloneqq ae_3 + e_4$, $u_4 \coloneqq e_3 - e_4$ と略記して $l_A(u_i)$ を計算すると

$$\begin{aligned} l_A(u_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1, \\ l_A(u_2) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -u_2, \quad l_A(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad l_A(u_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a+1 \\ a+1 \end{pmatrix} = (a+1)u_4. \end{aligned}$$

行列表示 B は $\bigl(l_A(u_1) \ \cdots \ l_A(u_4)\bigr) = (u_1 \ \cdots \ u_4)B$ を満たす行列だから,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

コメント. (1) と (2) を 15 点ずつ, 計 30 点満点で採点しました．平均点は 23.4 点でした．(1) で一次独立性と生成性のどちらか一方のみしか示していない場合は 5 点にしました．また (2) で計算間違いがある場合は程度により 5 点又は 10 点にしました．

解答にあるように $a \neq -1$ なら a の値に関わらない議論ができます．(1) は標準基底 $e_1, \ldots, e_4$ が $u_1, \ldots, u_4$ の一次結合で表せる事を示しても良いです．また (2) の行列表示は (1) の基底を並べてできる正方行列 P を使って $P^{-1}AP$ とも書けますが, P^{-1} の計算が面倒なので解答のようにする方が良いです．

問題 2. n を正の整数とし, 文字 x の高々 n 次の実数係数多項式の集合を V と書く. V は多項式の和とスカラー倍に関して実数体 $\mathbb{R}$ 上の $(n+1)$ 次元線形空間をなす. また b をあなたの学生番号の下 4 桁の数の和で定まる整数とする. 例えば学生番号が 062106789 なら $b = 6+7+8+9 = 30$ である.

(1) $b, x-b, (x-b)^2, \ldots, (x-b)^n$ は V の基底をなす事を示せ.

(2) $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in V$ を (1) の基底の一次結合で表せ.

解答. $b \neq 0$ に注意する.

(1) 次数が異なるのでこれら $n+1$ 個の多項式は一次独立. すると $\dim V = n+1$ より基底である.

(2) $x - b = y$ として, 与えられた x の多項式 f を y の多項式として書き直すと

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (y+b)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} y^j b^{i-j} = \sum_{j=0}^{n} y^j \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} a_i b^{i-j}.$$

よって, $b \neq 0$ に注意して

$$f = \Bigl(\sum_{i=0}^{n} a_i b^{i-j-1}\Bigr) \cdot b + \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} a_i b^{i-j}\Bigr) \cdot (x-b)^i.$$

コメント. (1) と (2) をそれぞれ 10 点, 計 20 点満点で採点しました. 平均点は 11.0 点でした. (1) で一次独立性と生成性のどちらか一方のみしか示していない場合は 5 点にしました. また (2) で b 及び $(x-b)^i$ の係数を明示的に書いていない場合 (連立方程式を解いていない, 逆行列の係数を求めていない等) は 5 点にしました.

(1) の一次独立性を厳密に示そうとすると, 例えば $b, x-b, \ldots, (x-b)^k$ の一次独立性を k に関する帰納法で示せば良いのですが, 結局は次数が異なる事だけ使う事になります. また (1) で生成する事を次元を使わずに証明しようとすると, 本質的に (2) を解くことになります. 数名の人がその方針で (1) と (2) を同時に解決していました.

問題 3. 以下の行列 A による左掛算写像 $l_A\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $l_A(v) \coloneqq Av$ について, $\mathrm{Ker}(l_A)$ と $\mathrm{Im}(l_A)$ の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ.

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

解答. 係数行列 A を簡約化 (行基本変形) すると

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, $Ax = 0$ の解は

$$x = b_1 v_1 + b_2 v_2 \quad (b_1, b_2 \in \mathbb{R}), \quad v_1 \coloneqq \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 \coloneqq \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける．従って v_1, v_2 が $\mathrm{Ker}(l_A)$ の基底を与える．また簡約化の結果から $\mathrm{rank}(A) = 3$, つまり $\dim \mathrm{Im}(f_A) = 3$ であり, A の列ベクトルのうち一次独立な三つのベクトル, 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が $\mathrm{Im}(l_A)$ の基底を与える．

コメント． Ker と Im それぞれ 10 点として, 計 20 点満点で採点しました．平均点は 17.0 点でした．基底の個数が足りなかったり, 計算間違いをしている場合は Ker と Im 各々 5 点にしました．

問題 4. V と W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間とし, $f\colon V \to V$, $g\colon W \to W$, $\varphi\colon V \to W$ 及び $\psi\colon W \to V$ を線形写像とする．また写像の合成を $\circ$ で表す．

(1) あなたの学生番号を整数と見なしたものを n とする．例えば学生番号が 062106789 なら $n = 62106789$ である．そして f, g, φ が以下の三条件を満たすものとする．
- f は同型写像.　• $\overbrace{g \circ \cdots \circ g}^{n} = 0$.　• $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

この時 $\varphi = 0$ である事を示せ．

(2) $\mathrm{rank}(\varphi \circ \psi) \leq \min\{\mathrm{rank}(\varphi), \mathrm{rank}(\psi)\}$ を示せ．

(3) $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ かつ $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ だと仮定する．この時 $\dim V = \dim W$ である事を, (2) を使って示せ．

解答． (1) n が正整数であることに注意する．合成 $\circ$ を省略して書くと $g^n = 0$, $\varphi f = g\varphi$. これらと写像の合成の結合律を繰り返し用いると

$$\varphi f^n = (\varphi f) f^{n-1} = (g\varphi) f^{n-1} = g(\varphi f) f^{n-2} = g^2(\varphi f) f^{n-3} = \cdots = g^{n-1}(\varphi f) = g^n \varphi = 0.$$

仮定から f の逆写像 f^{-1} が存在するから, f^n の逆写像 $f^{-n} := (f^{-1})^n$ も存在する．それを $\varphi f^n = 0$ の右から合成して $\varphi = 0$ を得る．

(2) $\mathrm{Im}(\varphi \circ \psi) = \varphi\big(\psi(W)\big) \subset \varphi(V) = \mathrm{Im}(\varphi)$ だから

$$\mathrm{rank}(\varphi \circ \psi) = \dim\big(\mathrm{Im}(\varphi \circ \psi)\big) \leq \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rank}(\varphi).$$

また線形写像 $\varphi|_{\mathrm{Im}(\psi)}\colon \mathrm{Im}(\psi) \to W$ について

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(\psi) = \dim \mathrm{Im}(\psi) &= \dim \mathrm{Ker}\big(\varphi|_{\mathrm{Im}(\psi)}\big) + \dim \mathrm{Im}\big(\varphi|_{\mathrm{Im}(\psi)}\big) \\ &\geq \dim \mathrm{Im}\big(\varphi|_{\mathrm{Im}(\psi)}\big) = \dim \mathrm{Im}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{rank}(\varphi \circ \psi). \end{aligned}$$

よって $\mathrm{rank}(\varphi \circ \psi) \leq \min\{\mathrm{rank}(\varphi), \mathrm{rank}(\psi)\}$.

(3) $r := \mathrm{rank}(\varphi)$ 及び $s := \mathrm{rank}(\psi)$ と置くと $r \leq \dim W$ と $s \leq \dim V$ が成立する．また $\mathrm{rank}(\mathrm{id}_W) = \dim W$ と (2) から $\dim W = \mathrm{rank}(\mathrm{id}_W) = \mathrm{rank}(\varphi \circ \psi) \leq \min\{r, s\}$. よって

$$\dim W \leq \min\{r, s\} \leq \min\{\dim V, \dim W\}, \quad \text{つまり} \ \dim W \leq \dim V.$$

同様に $\mathrm{rank}(\mathrm{id}_V) = \dim V$ と (2) から $\dim V \leq \dim W$ が従う．以上より $\dim V = \dim W$.

コメント. (1), (2), (3) それぞれ 10 点ずつ, 計 30 点満点で計算しました. 平均点は 11.1 点でした. (1) で $\varphi f^n = 0$ に類する事が正しく導出できていれば 5 点にしました.

(1) で次の二種類の誤った議論が目立ちました.

- "$v \in V$ に対して $g^{n-1}\bigl(\varphi(v)\bigr) = 0$ であり, g^{n-1} は線形写像だから $\varphi(v) = 0$."
  これは g^{n-1} が単射なら正しい議論ですが, $g^n = 0$ より g^{n-1} は単射になりえないので誤った議論です. (単射になりえないのは, もし $g^{n-1} = g^{n-2} \circ g$ が単射なら g も単射ですが, その合成 g^n も単射になって $g^n = 0$ と矛盾するからです.)
- "$g^{n-1} \circ \varphi = 0 \Rightarrow g^{n-1} = 0$ または $\varphi = 0$."
  合成可能な線形写像 α と β について $\alpha \circ \beta = 0 \not\Rightarrow \alpha = 0$ または $\beta = 0$ です. 実際, 行列の左掛算写像の場合を考えると, $\alpha = l_A$, $\beta = l_B$ なら $\alpha \circ \beta = l_{AB}$ で, 問題なのは "$AB = O$ なら $A = O$ または $B = O$" が正しいか否かという事です. しかし, 例えば $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とすると $A \neq O$, $B \neq O$ かつ $AB = O$ なので, 上の主張は成立しません.
  結合環 R の元 a は, 条件 "$\exists x \in R \setminus \{0\}$ s.t. $ax = 0$" を満たす時, 左零因子 (left zero divisor) と呼ばれます. 同様に R の右零因子が定義され, 左零因子かつ右零因子である R の元を零因子と呼びます.
  上の正方行列の例は, 2 次以上の行列環 $R = M(n; \mathbb{K})$ ($n \geq 2$, 正方行列の和と積からなる結合環) には零元でない零因子が存在する事を意味します. 一方, 体 $\mathbb{K} = M(1; \mathbb{K})$ では, $a, b \in \mathbb{K}$ が $ab = 0$ を満たせば $a = 0$ または $b = 0$ です. つまり体には 0 でない零因子は存在しません.

有限次元なので, (2) は線形写像を行列の掛算写像に置き換える事ができて, "積が取れる二つの行列 A, B について $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$" に帰着します. この不等式は一年生の線形代数で習っているでしょうし, 標準形を使えば直ぐに証明できます.

全体のコメント

計 $30 + 20 + 20 + 30 = 100$ 点で採点しました. 平均点は $23.4 + 10.9 + 17.0 + 11.2 = 62.5$ 点でした. 答案 1 枚目の名前欄の横に xx 点と書いてあるのが点数です. 得点分布は次の通りです.

得点	–49	50–59	60–69	70–89	90–
人数	11	13	22	12	9