現代数学基礎 BI　5 月 31 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ を非負整数の集合とし, 二変数 x, y の実係数多項式のなす線形空間 $\mathbb{R}[x, y]$ を考える.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して, 単項式 $y^n, xy^{n-1}, x^2y^{n-2}, \dots, x^{n-1}y, x^n$ を基底とする $\mathbb{R}[x, y]$ の部分空間を $V(n)$ と書く. $\mathbb{R}[x, y]$ が次の直和分解を持つことを示せ.

$$\mathbb{R}[x, y] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V(n).$$

(2) 三つの写像 $E, F, H \colon \mathbb{R}[x, y] \to \mathbb{R}[x, y]$ を, 多項式 $f \in \mathbb{R}[x, y]$ に対して

$$E(f) := y\frac{\partial f}{\partial x}, \quad F(f) := x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad H(f) := -x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

で定義する. 但し $\frac{\partial}{\partial x}$ は x に関する微分を, $\frac{\partial}{\partial y}$ は y に関する微分を表す. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, 写像 E, F, H がどれも $V(n)$ の自己準同型になる事を示せ.

(3) $V(n)$ の基底 $y^n, xy^{n-1}, \dots, x^{n-1}y, x^n$ に関する $E, F, H \in \mathrm{End}\bigl(V(n)\bigr)$ の行列表示をそれぞれ求めよ.

解答. (1) $V(n)$ は n 次斉次多項式 (全次数が n の単項式の線形結合) がなす $\mathbb{R}[x, y]$ の部分空間である. よって, $V_{\le n} := V(0) + \cdots + V(n)$ の元は高々 n 次の多項式だから, $V_{\le n} \cap V(n+1) = \{0\}$. また任意の多項式 $f = \sum_{i,j} f_{i,j}x^iy^j$ は斉次多項式の和で

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d, \quad f_n := \sum_{i+j=n} f_{i,j}x^iy^j \in V(n)$$

と書けるので $\mathbb{R}[x, y] = \sum_{n \in \mathbb{N}} V(n)$. 以上より $\mathbb{R}[x, y] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V(n)$.

(2) 微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 及び掛算写像 $x \cdot -, y \cdot -$ は $\mathbb{R}[x, y]$ の自己準同型だから, それらの合成 $E = (y \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial x}$, $F = (x \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial y}$, $H_1 := (x \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial x}$, $H_2 := (y \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial y}$ も $\mathbb{R}[x, y]$ の自己準同型であり, それらの線形結合 $H = -H_1 + H_2$ も $\mathbb{R}[x, y]$ の自己準同型である. あとは E, F, H それぞれによる $V(n)$ の像が $V(n)$ に含まれることを示せば $E, F, H \in \mathrm{End}\bigl(V(n)\bigr)$ が従うが, それを示すには $V(n)$ の基底 x^iy^{n-i} $(i = 0, \dots, n)$ の像が $V(n)$ に属すことを言えば十分.

$$E(x^iy^{n-i}) = ix^{i-1}y^{n-i+1}, \quad F(x^iy^{n-i}) = (n-i)x^{i+1}y^{n-i-1}, \quad H(x^iy^{n-i}) = (n-2i)x^iy^{n-i}$$

はどれも $V(n)$ の元だから, 主張が示せた.

(3) (2) の計算から, 行列表示は以下の $(n+1)$ 次正方行列になる. 但し書いていない成分は全て 0.

$$\bigl(E(y^n)\ E(xy^{n-1})\ \cdots\ E(x^{n-1}y)\ E(x^n)\bigr) = \bigl(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\bigr) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bigl(F(y^n)\ F(xy^{n-1})\ \cdots\ F(x^{n-1}y)\ F(x^n)\bigr) = \bigl(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\bigr) \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ n & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 2 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bigl(H(y^n)\ H(xy^{n-1})\ \cdots\ H(x^{n-1}y)\ H(x^n)\bigr) = \bigl(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\bigr) \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2-n & \\ & & & & -n \end{pmatrix}.$$

コメント. 各小問 1 点ずつ, 3 点満点で採点しました. 平均点は 1.6 点でした.

(1) では, 講義ノートの定義 2.4.6 のように, 正しく部分空間族の直和の条件が書けていた人は数名しかいませんでした. 殆どの方が $V(0) \cap V(1) \cap \cdots \cap V(n)$ が 0 であることや、$m \neq n$ に対して $V(m) \cap V(n) = \{0\}$ であることだけを示していました.

(2) は殆どの方ができていましたが, "E, F, H が $\mathbb{R}[x, y]$ の自己準同型なのでこれらは $V(n)$ 上の写像である" としていたり, $V(n)$ 上の写像である事と線型写像である事のいずれか一方しか示せていない人が数名いました.

(3) は, 計算ミスや添字が逆になっている等の軽微な間違いを除けば, 半分以上の方が正しく表現行列を求められていました.

前回の小テストで 2 次の特殊線形 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2)$ を扱いましたが, 今回の問題は微分作用素による $\mathfrak{sl}(2)$ の実現と, $\mathfrak{sl}(2)$ の既約表現を背景としています. 線形空間 $V(n)$ は $\mathfrak{sl}(2)$ の既約表現です. 更に任意の有限次元既約表現は, その次元を $n + 1$ とすると, $V(n)$ と同型であることが知られています.

以上です.