2022・5・31

問 変数xに関する n次以下の$\mathbb{C}$係数多項式全体のなす$\mathbb{C}$線形空間をVと書く.

(1) $1, x, x^2, \dots, x^n$が V の基底であることを示せ

(2) $a \in \mathbb{C}$として. 多項式$P(x)$に対して $T_a(P(x)) := P(x+a)$ とする事で. V の自己準同型 T_a が定まる事を示せ.

(3) (2)の基底に関する $T_a \in \mathrm{End}(V)$ の行列表示を求めよ.

(1) n次以下の$\mathbb{C}$係数多項式 $P(x)$は

$$P(x) = P_0 \cdot 1 + P_1 \cdot x + \cdots + P_n x^n \quad P_k \in \mathbb{C} \ (k=0,\dots,n)$$

と $1, x, \dots, x^n$の線形結合で一意に書ける. よってこれらは基底

(2) $P(x) = \sum_{k=0}^{n} P_k x^k \in V$ は T_a によって

$$T_a(P(x)) = P(x+a) = \sum_{k=0}^{n} P_k (x+a)^k = \sum_{k=0}^{n} P_k \cdot \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^l a^{k-l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} x^l \cdot \left(\sum_{k=l}^{n} P_k \binom{k}{l} a^{k-l} \right) \in V \qquad (*)$$

$\binom{k}{l} := \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} = \frac{k!}{l!(k-l)!}$

に写るので, T_aは写像$V \to V$ である. あとは線形性を示せば良いが,

$\forall P(x), q(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k \in V, \forall c, c' \in \mathbb{C}$に対して

$$cP(x) + c'q(x) = \sum_{k=0}^{n} (cP_k + c'q_k) x^k \text{ と } (*) \text{ より}$$

$$T_a(cP(x) + c'q(x)) = \sum_{l=0}^{n} x^l \sum_{k=l}^{n} (cP_k + c'q_k) \binom{k}{l} a^{k-l}$$

$$= c \cdot \sum_{l=0}^{n} x^l \sum_{k=l}^{n} P_k \binom{k}{l} a^{k-l}$$

$$+ c' \cdot \sum_{l=0}^{n} x^l \sum_{k=l}^{n} q_k \binom{k}{l} a^{k-l}$$

$$= c \cdot T_a(P(x)) + c' \cdot T_a(q(x)) \text{ となる.}$$

(3) $(*)$より $(T_a(1), T_a(x), T_a(x^2), \dots, T_a(x^n)) = (1, a+x, a^2+2ax+x^2, \dots, \sum \cdots)$

$$= (1, x, x^2, \dots, x^n) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ & 1 & 2a & \cdots & na^{n-1} \\ & & 1 & & \binom{n}{2}a^{n-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & na \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(i, j)成分は $(0 \le i, j \le n)$

$$\begin{cases} \binom{j}{i} a^{j-i} & i \le j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

問. Vを$\mathbb{C}$上の線形空間とし、
$f\in \mathrm{End}(V)$は$f\neq 0$かつ$f\circ f=f$だとする.
写像$g:V\to V$を$g(v):=v-f(v)$ $(v\in V)$で定める
(1) $g\in \mathrm{End}(V)$かつ$\mathrm{Im}\,g\subset \mathrm{Ker}\,f$を示せ
(2) $V=\mathrm{Im}\,f\oplus \mathrm{Ker}\,f$を示せ.
(3) Vが有限次元の時、$n:=\dim V$とすると、
ある$r\in\mathbb{Z}$, $1\le r\le n$とVの基底$v_1,\dots,v_n$が存在して
$$f(v_i)=\begin{cases} v_i & (1\le i\le r)\\ 0 & (r<i\le n)\end{cases}$$ となる事を示せ.

(1) $\forall v,w\in V$, $\forall c,d\in\mathbb{C}$に対して
$$g(cv+dw)=(cv+dw)-f(cv+dw)\overset{f:\text{線形}}{=}cv+dw-(cf(v)+df(w))$$
$$=c(v-f(v))+d(w-f(w))=c\cdot g(v)+d\cdot g(w)$$
なのでgは線形.
また$\forall v\in V$に対して $f(g(v))=f(v-f(v))\overset{f:\text{線形}}{=}f(v)-f(f(v))$
$$=f(v)-(f\circ f)(v)=f(v)-f(v)=0$$
なので $\mathrm{Im}\,g\subset \mathrm{Ker}\,f$
(2) $\forall v\in V$は $v=f(v)+(v-f(v))=f(v)+g(v)$と書けて、
$f(v)\in \mathrm{Im}\,f$, 及び(1)から $g(v)\in \mathrm{Im}\,g\subset \mathrm{Ker}\,f$なので $V=\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Ker}\,f$.
また、$v\in \mathrm{Im}\,f\cap \mathrm{Ker}\,f$なら. $v\in \mathrm{Im}\,f$より $v=f(w)$, $w\in V$と書けて、
$v\in \mathrm{Ker}\,f$より $0=f(v)=f(f(w))=(f\circ f)(w)=f(w)=v$.
よって $\mathrm{Im}\,f\cap \mathrm{Ker}\,f=\{0\}$. 以上より $V=\mathrm{Im}\,f\oplus \mathrm{Ker}\,f$.
(3) $r:=\mathrm{rank}\,f=\dim \mathrm{Im}\,f$とおく. $\mathrm{Im}\,f$の基底$v_1,\dots,v_r$を取り, これを延長して
Vの基底$v_1,\dots,v_r,\dots,v_n$を得る..
$i>r$なら(2)より$v_i\in \mathrm{Ker}\,f$. よって$f(v_i)=0$
$i\le r$なら $v_i\in \mathrm{Im}\,f$より $v_i=f(w_i)$, $w_i\in V$と書けて. $f(v_i)=(f\circ f)(w_i)=\overset{\overset{v_i}{\shortparallel}}{f(w_i)}$ □