現代数学基礎 BI　5 月 24 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. 複素数係数の二次行列の空間 $M(2;\mathbb{C})$ の部分空間 $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} \coloneqq \{X \in M(2;\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$$

で定義する．但し $\operatorname{tr} X$ は正方行列 X のトレースを表す．また $e, f, h \in \mathfrak{g}$ を次で定める．

$$e \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) e, f, h が $\mathfrak{g}$ の基底である事を示せ．

(2) 写像 $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\varphi(X) \coloneqq hX - Xh$ と定める．但し hX と Xh は行列の積を表す．対応 $X \mapsto \varphi(X)$ が自己準同型 $\varphi \in \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ を定める事を示せ．

(3) 基底 e, f, h に関する φ の行列表示を求めよ．

解答. (1) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ は $X = \left(\begin{smallmatrix} z & x \\ y & -z \end{smallmatrix}\right) = xe + yf + zh$ $(x, y, z \in \mathbb{C})$ と一意に表せるので，e, f, h は $\mathfrak{g}$ の基底である．

(2) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\operatorname{tr}\bigl(\varphi(X)\bigr) = \operatorname{tr}(hX - Xh) = \operatorname{tr}(hX) - \operatorname{tr}(Xh) = 0$ なので $\varphi(X) \in \mathfrak{g}$，つまり φ は写像 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ である．後は φ の線形性を示せば良いが，任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ と $c, d \in \mathbb{C}$ に対して $\varphi(cX + dY) = h(cX + dY) - (cX + dY)h = c(hX - Xh) + d(hY - Yh) = c\varphi(X) + d\varphi(Y)$ が成立するので，確かに φ は線形写像である．

(3) $\varphi(e) = he - eh = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 2e$, $\varphi(f) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = -2f$, $\varphi(h) = O$ なので，行列表示は次の対角行列になる．

$$\bigl(\varphi(e)\ \varphi(f)\ \varphi(h)\bigr) = (e\ f\ h) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

コメント. 各小問 1 点ずつ，3 点満点で採点しました．平均点は 2.1 点でした．

(1) は殆どの方が出来ていました．(2) では，$\mathfrak{g}$ 上の写像である事と線型写像である事の両方を示す必要がありますが，十数名の方がどちらか一方しか示せていませんでした．(3) の正しい行列表示は，$\dim \mathfrak{g} = 3$ より 3×3 行列になりますが，約半数の方の行列のサイズが 9×9 や 3×1 等になっていました．行列表示の定義を正しくと理解して下さい．

$\mathfrak{g}$ は交換子 $[X, Y] \coloneqq XY - YX$ を Lie 括弧とする **$\mathbb{C}$ 上の Lie 代数** (Lie algebra over $\mathbb{C}$) で，2 次の**特殊線形 Lie 代数** $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (special linear Lie algebra) と呼ばれているものです．任意の Lie 代数 L とその元 $X \in L$ に対して $\operatorname{ad} X \coloneqq [X, \cdot]$ は $\operatorname{End}(L)$ の元で，$L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $X = h$ とすれば $\operatorname{ad} h = \varphi$ です．

以上です.