2022・5・24

§6 核と像

線形空間は $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ 又は $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ 上のもの.

Ex. U, V, W：有限次元線形空間

$f \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$

fは単射 かつ $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$ かつ gは全射

$\Rightarrow \dim V = \dim U + \dim W$

∵ $\dim U = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = 0 + \mathrm{rank} f = \mathrm{rank} f$

f単射, Lem.6.1.5.

$\dim V = \dim \mathrm{Ker} g + \dim \mathrm{Im} g = \dim \mathrm{Im} f + \dim W = \mathrm{rank} f + \dim W$

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$, g全射

∴ $\dim V = \dim U + \dim W$ □

§6.1.

Prp.6.1.1/Dfn.6.1.2. V, W：線形空間, $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$

(1) $\mathrm{Ker} f := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$ はVの部分空間.

これをfの核 (kernel) と呼ぶ.

(2) $\mathrm{Im} f := \{ w \in W \mid \exists v \in V, f(v) = w \}$ はWの部分空間.

これをfの像 (image) と呼ぶ

更に $\mathrm{Im} f$ が有限次元の場合,

$\mathrm{rank} f := \dim(\mathrm{Im} f)$

と書いて, fの階数と呼ぶ. □

Lem.6.1.5. 線形写像 fが単射 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$ □

§6.2. 線形写像の標準形

Thm. 6.2.1. V, W: 有限次元線形空間. $n := \dim V$, $m := \dim W$
$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ $\quad r := \mathrm{rank} f$ ← $\mathrm{Im} f \subset W$ は有限次元.
$\Rightarrow$ $\exists v_1, \ldots, v_n$: V の基底
$\exists w_1, \ldots, w_m$: W 〃
s.t. $\quad f(v_i) = \begin{cases} w_i & (1 \leqq i \leqq r) \\ 0 & (r < i \leqq n) \end{cases}$

特に, これらの基底に関する f の行列表示は

$$(f(v_1) \cdots f(v_n)) = (w_1 \cdots w_m) \begin{array}{cc} \overbrace{}^{n} & \\ \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} & \}m \end{array}$$

∵ V' を $\mathrm{Ker} f \subset V$ の補空間とする. ($V = V' \oplus \mathrm{Ker} f$ をみたす部分空間 V')
制限写像 $f|_{V'}: V' \to \mathrm{Im} f$ は同型写像

∵ 線形性は明らか. 全射: $\forall w \in \mathrm{Im} f$, $\exists v \in V$, $w = f(v)$. $V = V' + \mathrm{Ker} f$ より
$\exists v' \in V'$, $\exists v'' \in \mathrm{Ker}(f)$, $v = v' + v''$ $\quad \therefore w = f(v) = f(v') + f(v'') = f(v')$
単射: $v \in V'$ に対して $(f|_{V'})(v) = 0 \iff f(v) = 0 \iff v \in \mathrm{Ker} f$)
$\mathrm{Ker}(f|_{V'}) = V' \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$ ← $V = V' \oplus \mathrm{Ker} f$ より

$r = \dim \mathrm{Im} f$ より $\quad \dim V' = r$.
V' の基底 $v_1, \ldots, v_r$ を取り, 延長して V の基底 $v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n$ を得る.
$r < i \leqq n$ なる $v_i \in \mathrm{Ker} f$ だから $\quad f(v_i) = 0$
$1 \leqq i \leqq r$ に対して $w_i := f(v_i) \in \mathrm{Im} f \subset W$ とすると,
$f|_{V'}$ が同型だから $w_1, \ldots, w_r$ は $\mathrm{Im} f$ の基底.
これを延長して W の基底 $w_1, \ldots, w_r, \ldots, w_m$ が得られる. $\square$

Cor. 6.2.3 上の証明の記号で, $v_{r+1}, \ldots, v_n$ は $\mathrm{Ker} f$ の基底.
特に $\quad \dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \underbrace{\mathrm{rank} f}_{\dim \mathrm{Im} f}$ $\square$

<u>Cor. 6.2.5.</u> V, W：有限次元線形空間. $n := \dim V$, $m := \dim W$
B_V, B_W：V, W の基底. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
$A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$：$B_V, B_W$ に関する f の行列表示.
$\Rightarrow \operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A$. $\square$

行列の階数

<u>Fact 6.2.4.</u> $\operatorname{rank} A$ = (A を基本変形して、対角に並ぶ 1 の数)
= (A の行ベクトルのうち一次独立なものの数)
= (A の列 〃 〃)
= (A の小行列式であって、0 でないものの最大サイズ)
$\square$

[Cor. 6.2.5 の証明]
Thm. 6.2.1. の証明の記号を用いると、
$(v_1, \ldots, v_n)$ と $(w_1, \ldots, w_m)$ に関する行列表示は $A_0 := \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ で、
$\operatorname{rank} f = r = \operatorname{rank} A_0$.
Thm. 5.2.7 より $\exists P, Q$：正則行列 $A = Q^{-1} A_0 P$.
つまり A は A_0 を基本変形したものなので $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_0$ $\square$

<u>Cor. 6.2.6.</u> $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ による左掛算写像 $\ell_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$
について. $\operatorname{rank} \ell_A = \operatorname{rank} A$
∵ ℓ_A の標準基底に関する行列表示は A (Eg. 5.1.4)
Cor. 6.2.5 より $\square$