現代数学基礎 BI　5 月 17 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. 二変数 x, y の実数係数多項式全体のなす集合 $\mathbb{R}[x,y]$ は, 多項式の和とスカラー倍について線形空間をなす. 写像 $D\colon \mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{R}[x,y]$ を, 多項式 $f \in \mathbb{R}[x,y]$ に対して

$$D(f) \coloneqq x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

で定義する. 但し $\frac{\partial}{\partial x}$ は (y を定数と見なして) x について微分する事を, $\frac{\partial}{\partial y}$ は y に関する微分を表す.

(1) $D \in \mathrm{End}\big(\mathbb{R}[x,y]\big)$ を示せ.

(2) 整数 n に対して部分集合 $V(n) \subset \mathbb{R}[x,y]$ を

$$V(n) \coloneqq \{f \in \mathbb{R}[x,y] \mid D(f) = nf\}$$

で定義する. $V(n)$ が $\mathbb{R}[x,y]$ の部分空間である事を示せ.

(3) $V(n)$ が有限次元か否かを議論せよ. また有限次元の場合は $\dim V(n)$ を求めよ.

解答. (1) D が線形写像である事を示せば十分. 任意の $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} D(af+bg) &= x\frac{\partial(af+bg)}{\partial x} + y\frac{\partial(af+bg)}{\partial y} = x\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial g}{\partial x}\right) + y\left(a\frac{\partial f}{\partial y} + b\frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ &= a\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y}\right) = aD(f) + bD(g) \end{aligned}$$

となるので, 確かに線形写像である.

(2) $0 \in \mathbb{R}[x,y]$ は $D(0) = 0 = n \cdot 0$ を満たすので $0 \in V(n)$. また任意の $f, g \in V(n)$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$D(af+bg) = aD(f) + bD(g) = a(nf) + b(nf) = n(af+bf)$$

なので $af + bf \in V(n)$ である. よって $V(n) \subset \mathbb{R}[x,y]$ は部分空間である.

(3) 単項式 $x^j y^k$ $(j, k \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{R}[x,y]$ の基底をなす.

$$D(x^j y^k) = x\frac{\partial(x^j y^k)}{\partial x} + y\frac{\partial(x^j y^k)}{\partial y} = x(jx^{j-1}y^k) + y(kx^j y^{k-1}) = (j+k)x^j y^k$$

より $x^j y^{n-j} \in V(n)$ $(0 \le j \le n)$ であり, 基底のその他の元は $V(n)$ に含まれない. よってこれら有限個の元が $V(n)$ の基底であり, $V(n)$ は有限次元で, n が 0 以上なら $\dim V(n) = n+1$, 0 未満なら $\dim V(n) = 0$ である.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.2 点でした.

(1) は殆どの方が出来ていました。(2) では, 半数程の方が部分空間が零元を含む (あるいは空集合でない) という条件を抜かしていました. (3) では, 二変数多項式の元として x か y 一方の冪として書ける項しか考えていない方が数名いました. 残りは全く手を付けていない方と完答している方が約半々でした.

以上です.