2022・5・17

§5 行列表示

☆ アンケート回答宜しくお願いします.(NUCTで実施中)

線形空間は $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ 又は $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ 上のもの.

<u>Ex.</u> $V := \mathbb{K}[x]_{\leq 3} = \{ f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 \mid f_i \in \mathbb{K} \}$

$D = \frac{d}{dx} \in \mathrm{End}(V) \quad D(f) = f_1 + 2f_2 x + 3f_3 x^2$

$B := (1, x, x^2, x^3)$, $B' := (1, x, x(x+1), x(x+1)(x+2))$

は共にVの基底.

(1) Bに関するDの行列表示 $A \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{K})$ を求めよ.

(2) B' 〃 A' 〃 〃

(3) BからB'への基底変換行列 P 〃

(4) $A' = P^{-1}AP$ を示せ □

☺ (1) $(D(1), D(x), D(x^2), D(x^3))$

$$= (0, 1, 2x, 3x^2) = (1, x, x^2, x^3) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

(2) $(D(1), D(x), D(x(x+1)), D(x(x+1)(x+2)))$

$$= (0, 1, 1+2x, 2+3x+3x(x+1))$$

$$= (1, x, x(x+1), x(x+1)(x+2)) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 3 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{A'}$$

(3) $(1, x, x(x+1), x(x+1)(x+2))$

$$= (1, x, x^2, x^3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

(4) ($\det P = 1 \neq 0$ だから P は正則)

$PA' = AP$ を示せば良いが

$$PA' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 6 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = AP$$

□

§5.1.

Dfn.5.1.2 V, W：有限次元線形空間 $n := \dim V$, $m := \dim W$
$B_V = (v_1, \ldots, v_n)$: Vの基底.
$B_W = (w_1, \ldots, w_m)$: W 〃 .

(1) $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対し,
$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$
を並べて出来る行列
$$A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m, n; \mathbb{K})$$
を, fのB_V, B_Wに関する行列表示又は表現行列という. つまり

$f(B_V) = B_W A$
$$(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = (w_1, \ldots, w_m) A$$

(2) $f \in \mathrm{End}(V)$に対しては,
$$f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} v_i a_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$
から定まる $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n; \mathbb{K})$を
fのB_Vに関する行列表示という. □

Eg.5.1.4 $A \in M(m, n; \mathbb{K})$に対する左掛算写像
$$\ell_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad \ell_A(v) = Av$$
の標準基底 $B^n_{std} = (e_1, \ldots, e_n)$, $B^m_{std} = (e_1, \ldots, e_m)$に関する行列表示は
$$\ell_A(e_j) = Ae_j = A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} e_i a_{ij}$$
$(\ell_A(e_1), \ldots, \ell_A(e_n)) = (e_1, \ldots, e_m) A$ より A自身 □

Ex.(Lem 5.1.8.(3)) V：線形空間, $n := \dim V < \infty$, $B = (v_1, \ldots, v_n)$：Vの基底
$\mathrm{id} : V \to V$のBに関する行列表示は
$(\mathrm{id}(v_1), \ldots, \mathrm{id}(v_n)) = (v_1, \ldots, v_n) E_n$ より単位行列 E_n □

Prp. 5.1.7 写像 $\varphi : M(m,n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\varphi(A) := l_A$
は同型写像. 逆写像は $f \mapsto (B_{std}^n, B_{std}^m$ に関する f の行列表示$)$
$\quad\quad\quad\quad \overset{\pi}{\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)} \quad \overset{\pi}{M(m,n;\mathbb{K})}$

(c.f. 前回の講義の Ex. (3)) □

Lem. 5.1.8. U, V, W: 有限次元線形空間
B_U, B_V, B_W: 基底

(1) $f, f' \in \mathrm{Hom}(V,W)$, A, A': f, f' の B_V, B_W に関する行列表示.
$c, c' \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow$ $cf + c'f' \in \mathrm{Hom}(V,W)$ の行列表示は $cA + c'A'$

(2) $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, A: B_V, B_W に関する行列表示
$f' \in \mathrm{Hom}(U,V)$, A': B_U, B_V 〃
$\Rightarrow$ $f \circ f' \in \mathrm{Hom}(U,W)$ の B_U, B_W 〃 は AA'

(3) $f \in \mathrm{End}(V)$ の B_V に関する行列表示を A とすると,
f が自己同型 $\Leftrightarrow$ A が正則. □

(∵) (2) $B_U = (u_1, \ldots, u_n)$, $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$, $B_W = (w_1, \ldots, w_l)$

$$
\begin{aligned}
(f \circ f')(u_j) &= f\left(\textstyle\sum_{k=1}^{m} v_k a'_{kj}\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{m} f(v_k) a'_{kj} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_{ik}\right) a'_{kj} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{ik} a'_{kj}}_{= (AA')_{ij}}
\end{aligned}
$$

(3) は (2) から □

§5.2.

Lem. 5.2.1 V: 有限次元線形空間. $B = (x_1, \ldots, x_n)$: V の基底
$y_1, \ldots, y_n \in V$, $P \in \mathrm{End}(V)$ は $P(x_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たすもの
この時 y_i 達が基底 $\Leftrightarrow$ P は同型 (Cor. 4.4.2) ← Prp. 4.4. により一意存在
$\overset{\text{Lem. 5.1.8 (3)}}{\Leftrightarrow}$ P の B に関する行列表示 P は正則 □

Dfn.5.2.2. $B'=(y_1,\dots,y_n)$ がVの基底の時、上の正則行列Pを
BからB'への基底変換行列という。つまり
$$(y_1,\dots,y_n)=(x_1,\dots,x_n)P. \qquad B'=BP \qquad \square$$

Thm.5.2.7. V,W: 有限次元線形空間, $f\in \mathrm{Hom}(V,W)$
B_V, B_V': Vの基底. P: B_VからB_V'への基底変換行列
B_W, B_W': W 〃 　Q: B_WからB_W' 〃
A: fのB_V, B_Wに関する行列表示
この時、fのB_V', B_W'に関する行列表示は $Q^{-1}AP$

∵
$$\begin{aligned} f(B_V') &= f(B_VP) && [B_V'=B_VP] \\ &= f(B_V)P && [f\text{は線形}] \\ &= B_WAP && [f(B_V)=B_WA] \\ &= B_W'Q^{-1}AQ && [B_W'=B_WQ] \end{aligned}$$
$\square$

Cor.5.2.8. $f\in \mathrm{End}(V)$のB_Vに関する行列表示がAの時、
B_V'に関する行列表示は $P^{-1}AP$ $\square$