

現代数学基礎 BI 5月10日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html>

問題. 実ベクトル空間 \mathbb{R}^4 を考える. その元

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

について, x と y が張る部分空間を P とし, z と w が張る部分空間を Q とする. 和空間 $P + Q$ の基底を一組与えよ.

解答. 和空間の次元公式 $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$ を念頭に置いて, まず部分空間 $P \cap Q \subset \mathbb{R}^4$ の次元を求める. $P \cap Q$ の元は $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を用いて $ax + by = cz + dw$ と書けるから, 連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} = 0, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

の解 $(a, b, -c, -d)$ に対応する. 係数行列 A を行基本変形すると

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, 解は $(a, b, -c, -d) = r \cdot (3, 2, 1, 1)$ ($r \in \mathbb{R}$) と書ける. よって $\dim P \cap Q = 1$ であり,

$$u := 3x + 2y = -z - w = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

が $P \cap Q$ の基底である. 従って $\dim(P + Q) = 2 + 2 - 1 = 3$ である. $P \cap Q$ の基底 u と $P \setminus \mathbb{R}u$ の元, 及び $Q \setminus \mathbb{R}u$ の元の 3 つを取れば, それらは線形独立だから, 次元の計算より $P + Q$ の基底になる. 例えば u, x, z が $P + Q$ の基底である.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.3 点でした. 基底が正しく与えられていること, その説明が正しく書いていれば 3 点です.

$P + Q$ の基底は解答の方針だと他に $(u, y, z), (u, x, w), (u, y, w)$ があります.

また, $\text{rank } A = 3$ を示した後は「 x, y, z, w から 3 つ線形独立な元を選べば良いので, x, y, z が $P + Q$ が基底である」という議論でも良いです. この方針の答案が多かったです.

「行基本変形は...となる. よって...が基底である.」と書いているだけで議論が不十分な答案が全体の $\frac{1}{4}$ 位ありましたが, それは 1 点減点しています. なぜ基本変形をするのか, それからどのように基底を選ぶのか, 解答のように議論を丁寧に書く習慣を付けて下さい.

以上です.