2022・5・10

§4. 線形写像

$\mathbb{K} := \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$　　線形空間 := $\mathbb{K}$上のもの.

Ex. $A = \begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\ell_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\ell_A(v) := Av$

$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$: 部分空間

以下を示せ

(1) $\ell_A(W_1) \subset W_1$

(2) 部分空間 $W_2 \subset \mathbb{R}^2$ が $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ をみたすなら

$\ell_A(W_2) \not\subset W_2$

(3) $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \cong M(2;\mathbb{R})$

∵ (1) $\ell_A\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\0\end{pmatrix} \in W_1$ より $\ell_A(W_1) \subset W_1$

(2) $\dim W_2 = \dim \mathbb{R}^2 - \dim W_1 = 2 - 1 = 1$ より

$W_2 = \mathbb{R}w$, $w = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ と書ける.

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ より $y_0 \neq 0$.

すると $\ell_A(w) = Aw = \begin{pmatrix}2x_0 + y_0\\2y_0\end{pmatrix} = 2w + \begin{pmatrix}y_0\\0\end{pmatrix} \notin W_2$

なので $\ell_A(W_2) \not\subset W_2$

(3) $\varphi : M(2;\mathbb{R}) \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(B) := \ell_B$

は §4.2のEg.より線形写像

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

逆写像は $\psi : \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \to M(2;\mathbb{R})$, $\psi(f) := (f(e_1)\ \ f(e_2))$

$f(e_1) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$ として $\begin{pmatrix}x&z\\y&w\end{pmatrix} \in M(2;\mathbb{R})$

- $(\psi \circ \varphi)(B) = \psi(\ell_B) = (\ell_B(e_1)\ \ell_B(e_2)) = \left(B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = B\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = B$
- $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \ni (\psi \circ \varphi)(f) = \ell_{\psi(f)} = \ell_{(f(e_1)\ f(e_2))}$

$(\varphi \circ \psi)(f)(e_1) = (f(e_1)\ f(e_2))\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f(e_1)$

$(\quad〃\quad)(f)(e_2) = (\quad〃\quad)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f(e_2)$

Prp. 4.1.3 から $(\psi \circ \varphi)(f) = f$ 　　□

§4.1.

Dfn. V, W:線形空間. $f: V \to W$ 写像

fが<u>線形</u> $:\Leftrightarrow$ $\forall v, v' \in V$ $\forall c, c' \in \mathbb{K}$ $f(cv + c'v') = c.f(v) + c'.f(v')$ □

行列空間

E.g. (1) $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ $\quad l_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $v \mapsto Av$

(2) $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$

微分作用素 $\quad f(x) \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k f}{dx^k}$ □

Dfn.4.1.1. 線形写像を<u>準同型写像</u>とも言う.

〃 $f: V \to V$ を Vの<u>自己準同型</u>という □

Vは有限次元

Prp.4.1.3. V, W:線形空間, $n := \dim V < \infty$

$v_1, \ldots, v_n$: Vの基底, $\quad w_1, \ldots, w_n \in W$

$\Rightarrow$ $\exists!$ 線形写像 $f: V \to W$ s.t. $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$

(∵) $\forall v \in V$ は $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$, $c_i \in \mathbb{K}$ と一意に書ける

$f(v) := \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$ とすれば、写像 $f: V \to W$が定まって 主張の条件をみたす.

一意性も簡単に示せる. □

§4.2.

Dfn. V, W:線形空間

$\mathrm{Hom}(V, W) := \{f: V \to W \mid 線形\}$, $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$ □

Prp.4.2.6. $(\mathrm{Hom}(V, W), +, 0, \cdot)$ は線形空間. 但し

$f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ $\quad (f+g)(v) := f(v) + g(v)$

$c \in \mathbb{K}$ $\quad (c.f)(v) := c.f(v)$

$0(v) := 0_W$ $\quad (\forall v \in V)$ □

零写像

Eg. $A, A' \in M(m,n;\mathbb{K})$, $c, c' \in \mathbb{K}$
$l_A, l_{A'}, l_{cA+c'A'} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$
$$c \cdot l_A + c' l_{A'} = l_{cA+c'A'}$$
∵ $\forall v \in \mathbb{K}^n$ $(c \cdot l_A + c' l_{A'})(v)$
$= c \cdot l_A(v) + c' \cdot l_{A'}(v)$ [Homの+, ・の定義]
$= c \cdot (Av) + c' \cdot (A'v)$ [$l_A, l_{A'}$ 〃]
$= (cA + c'A')v$ [行列の和・積の分配律]
$= l_{cA+c'A'}(v)$ [$l_{cA+c'A'}$の定義] □

§4.3.

Dfn.4.3.1. (1) 全単射である線形写像を同型写像という
(2) 〃 自己準同型を自己同型という □

Eg.4.3.4. $\mathbb{K}[x]_{\leq n} := \{n$次以下の$x$の多項式$\}$
写像 $\varphi : \mathbb{K}[x]_{\leq n} \to \mathbb{K}^{n+1}$, $\varphi(\sum_{k=0}^{n} f_k x^k) := \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$
は同型写像.
∵ 線形性は簡単に示せる. $\psi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}[x]_{\leq n}$, $\psi\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} := \sum_{k=0}^{n} f_k x^k$
がφの逆写像なので, φは全単射. □

Lem.4.3.5. $f : U \to V$, $g : V \to W$: 同型写像
(1) $\mathrm{id}_V : V \to V$ は同型
(2) $f^{-1} : V \to U$ 〃
(3) $g \circ f : U \to W$ 〃 □

Dfn.4.3.6 線形空間VとWに対して
$V \cong W$:⟺ $\exists f : V \to W$ 同型写像
この時 VとWは同型であるという. □

← Lem.4.3.5の

Cor.4.3.7. $\cong$ は線形空間全体の上に同値関係を定める.

つまり, $^\forall U, V, W$: 線形空間. に対し

(i) $V \cong V$ (ii) $V \cong W \Rightarrow W \cong V$ (iii) $U \cong V$ かつ $V \cong W \Rightarrow U \cong W$ □

Prp.4.3.9. V, W : 線形空間. $\dim V < \infty$, $v_1, \dots, v_n$: Vの基底

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$に対し fが同型写像 $\Leftrightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$はWの基底 □

Thm.4.3.10. V : 有限次元線形空間, $n := \dim V$

$\Rightarrow V \cong \mathbb{K}^n$

∵ $v_1, \dots, v_n$: Vの基底, $e_1, \dots, e_n$: $\mathbb{K}^n$の標準基底

Prp.4.1.3 より $^{\exists !} f \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}^n)$ s.t. $f(v_i) = e_i$

Prp.4.3.9. より fは同型. □

Prp.4.3.12. V, W : 線形空間. $\dim V < \infty$.

この時 $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

∵ $n := \dim V$

($\Rightarrow$) $v_1, \dots, v_n$: Vの基底. $f : V \to W$: 同型写像

Prp.4.3.9.より $f(v_1), \dots, f(v_n)$はWの基底 ∴ $\dim W = n$

($\Leftarrow$) Thm.4.3.10 より $V \cong \mathbb{K}^n$, $W \cong \mathbb{K}^n$

Cor.4.3.7 より $V \cong \mathbb{K}^n \cong W$, $V \cong W$ □