現代数学基礎 BI　4 月 26 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. 2 次以下の実数係数多項式 $p(x) = \sum_{i=0}^{2} p_i x^i$ $(p_i \in \mathbb{R})$ 全体がなす集合を V と書く. V は多項式の和とスカラー倍に関して $\mathbb{R}$ 上の線形空間になる (この事は認めて良い). この時, V の部分集合

$$W := \left\{ p(x) \in V \;\middle|\; \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = 0 \right\}$$

が部分空間である事を示せ. また $U \oplus W = V$ となる部分空間 $U \subset V$ を一つ挙げよ.

解答. $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$ に対して $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = 2(p_0 + p_2/3)$ となるから, 部分集合 $W \subset V$ は

$$W = \{p_0(1-3x^2) + p_1 x \mid p_0, p_1 \in \mathbb{R}\} \tag{$\star$}$$

と書ける. W が V の部分空間である事を示そう. $p_0 = p_1 = 0$ とすれば $0 \in W$ が従う. 任意の $p(x), q(x) \in W$ と $c, d \in \mathbb{R}$ を取ると, W の記述 $(\star)$ より, 適当な $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \mathbb{R}$ を用いて $p(x) = p_0(1-3x^2) + p_1 x$, $q(x) = q_0(1-3x^2) + q_1 x$ と書けるから,

$$c\,p(x) + d\,q(x) = (cp_0 + dq_0)(1-3x^2) + (cp_1 + dq_1)x$$

となって, 再び $(\star)$ より $c\,p(x) + d\,q(x) \in W$ が従う. よって $W \subset V$ は部分空間.

次に 2 次項のみからなる部分集合 $U \subset V$, つまり

$$U := \{p(x) = p_2 x^2 \in V \mid p_2 \in \mathbb{R}\}$$

が部分空間であって, かつ $U \oplus W = V$ を満たす事を示そう. 次の三条件を示せば良い.

(i) U が部分空間である事は, $p_2 = 0$ とすれば $0 \in U$ となり, また任意の $p(x) = p_0 x^2$, $q(x) = q_0 x^2 \in U$ と $c, d \in \mathbb{R}$ に対して $c\,p(x) + d\,q(x) = (cp_0 + dq_0)x^2 \in U$ となる事から従う.

(ii) 次に $U \cap W = \{0\}$ を示そう. $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \in U \cap W$ とすると, $p(x) \in W$ と $(\star)$ より $p_2 = -3p_0$. 一方で $p(x) \in U$ から $p_0 = p_1 = 0$. よって $p_0 = p_1 = p_2 = 0$ となり, $p(x) = 0$ が従う.

(iii) 以上で $U \oplus W = U + W \subset V$ が部分空間である事が言えたから, 後は $U + W = V$, つまり任意の V の元が U の元と W の元の和で書ける事を示せば良い. 任意の $V \ni p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$ は

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 = (3p_0 + p_2)x^2 + \bigl(p_0(1-3x^2) + p_1 x\bigr)$$

と書けて, $(3p_0 + p_2)x^2 \in U$, $p_0(1-3x^2) + p_1 x \in W$ だから, $V = U + W$ が従う.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.2 点でした. W が部分空間である事の証明に 2 点, W の補空間 U の構成に 1 点という配点で採点しました.

後半の U は $\mathbb{R} + \mathbb{R}x^2$ の 1 次元部分空間であれば何でもよいです. 解答の選び方の他には, 例えば定数項のなす部分空間 $U = \{p(x) = p_0 \in V \mid p_0 \in \mathbb{R}\}$ があります.

「W は奇関数なす部分集合」としている答案が幾つかありましたが, これは正しくないです. 実際, $\int_{-1}^{1}(1-3x^2)dx = 0$ より偶関数 $1-3x^2$ は W の元です.

また後半で U を W の補集合, つまり $U \coloneqq \{p(x) \in V \mid \int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 0\}$ としてしまっている答案が幾つかありましたが, これは V の部分空間にはなりません. 実際, $0 \in V$ が含まれません. また $U \coloneqq (V \setminus W) \cup \{0\}$ としている答案も幾つかありましたが, これも V の部分空間にはなりません. 実際, $3, -x^2 \in U$ ですが, $\int_{-1}^{1}(3-x^2)dx = 0$ なので $3 + (-x^2) \notin U$ です.