2022・4・26

§3 基底と次元

Ex.3.2.4. $W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1+x_2-x_3-2x_4=0 \\ -x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \end{array} \right\}$

$W_2 := \left\{ \quad \text{〃} \quad \middle|\; \begin{array}{l} x_1+2x_2+2x_3-3x_4=0 \\ -4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=0 \end{array} \right\}$

W_1, W_2が線形空間$\mathbb{R}^4$の部分空間である事を示し和W_1+W_2の次元を求め、基底を一組与えよ. □

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$又は$\mathbb{R}$又は$\mathbb{C}$. 線形空間・写像は$\mathbb{K}$上のもの

§3.1. 一次独立性

Dfn.3.1.2 V:線形空間 $S \subset V$:部分集合

Sが一次独立 $:\Leftrightarrow \forall \{v_1, \dots, v_n\} \subset S$ 有限部分集合

$\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \quad c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$

$\Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$ □

§3.2. 基底

Dfn.3.2.1. 線形空間Vの元の族 $v_i\ (i \in I)$がVの基底.

$:\Leftrightarrow$ 線形独立かつVの生成系である. □

Lem.3.2.7. $v_i \in V\ (i \in I)$がVの基底

$\Leftrightarrow \forall v \in V \ \exists! c_i \in \mathbb{K}\ (i \in I)$, 有限コの$i$を除いて$c_i=0$,

$v = \sum_{i \in I} c_iv_i$ □

vから係数c_iが一意に決まる.

Eg. 3.2.2 & 3.2.10. 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} i$ 単位ベクトル

- $B_{std} := (e_1, e_2, \dots, e_n)$ は基底 (標準基底)
- $B' := (e_1, e_1+e_2, \dots, e_1+\dots+e_n)$ も基底.
- $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$, $(e_1-e_2, e_2-e_3, \dots, e_{n-1}-e_n)$ は基底でない. □

Eg. 3.2.3. 多項式空間 $\mathbb{K}[x]$.
単項式の族 $(1, x, x^2, \dots) = (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は基底 □

Thm. 3.2.11. 任意の線形空間は基底を持つ. □
次を使って示す.

Thm. 3.2.15, Cor. 3.4.4. (基底の延長) V: 線形空間, $B \subset V$: 一次独立
$W := \langle B \rangle \subsetneq V$ なら $^\forall v \in V \setminus W$ $B \cup \{v\}$ も一次独立 □
← B は W の基底

§3.3 次元

Dfn. 3.2.12. 線形空間 V が有限次元
:⟺ ∃ 有限個の元 $v_1, \dots, v_n \in V$ が V の基底.
⟺ $^\forall v \in V$ $^\exists! c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ □
Lem. 3.2.7.

Eg. 3.2.12 & 13. $\mathbb{K}^n$ は有限次元. $\mathbb{K}[x]$ は無限次元 □

Thm. 3.3.1. & Dfn. 3.3.2. 有限次元線形空間 V の 2つの基底
$v_1, \dots, v_n$ と $w_1, \dots, w_n$ の元の個数 n は等しい.
これを V の次元と呼び, $\dim V$ で表す □

Eg. 3.4.8. $\mathbb{K}^n$ の標準基底 B_{std} と基底 B' は どちらも n; $\dim \mathbb{K}^n = n$ □

<u>Lem.3.3.6. – Prp.3.3.9.</u>

V：有限次元線形空間，$W, W' \subset V$ 部分空間

(1) W は有限次元．$\dim W \leq \dim V$.

$\dim W = \dim V$ なら $W = V$

(2) $\dim(W+W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$

特に $\dim(W+W') \geqq \dim W + \dim W'$ で，

等号が成立 $\Leftrightarrow W \cap W' = \{0\} \Leftrightarrow W+W' = W \oplus W'$

∵ 基底延長定理 (Thm.3.2.15) を使う．□

<u>冒頭の問題</u>．$W_i = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A_i x = 0\}$

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$l_{A_i} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$，$l_{A_i}(x) = A_i x$ ：線形写像

$W_i = l_{A_i}^{-1}(0)$

<u>Lem.</u> $\forall f : V \to W$ 線形写像．$f^{-1}(0) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ は V の部分空間

∵ $\forall v, v' \in f^{-1}(0)$，$\forall c, c' \in \mathbb{K}$

$f(cv + c'v') = cf(v) + c'f(v')$ （∵ f は線形）

$= c \cdot 0 + c' \cdot 0 = 0$ ∴ $cv + c'v' \in f^{-1}(0)$ □

特に $W_i \subset \mathbb{R}^4$ は部分空間．

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

より．$\dim W_1$，$\dim W_2$，$\dim(W_1 \cap W_2)$ を求める．

<u>$\dim W_1$</u>　W_1 の基底，つまり連立方程式 $A_1 x = 0$ の独立な解を全て求める．

$$A_1 \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

∴ $x = cu + dv$ $(c, d \in \mathbb{R})$

$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ∴ $\dim W_1 = 2$

$\underline{\dim W_2}$ $A_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 10 & 5 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore x = cw + dv \quad (c, d \in \mathbb{R}) \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim W_2 = 2$

$\underline{\dim(W_1 \cap W_2)}$ $W_1 \cap W_2 = \{ x \in K^4 \mid A_1 x = A_2 x = 0 \}$

$= \{ x \in K^4 \mid Ax = 0 \}$

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 2 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore W_1 \cap W_2 = \mathbb{R} v \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \dim W_1 \cap W_2 = 1$

$\therefore \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3$

基底 : u, v, w $\square$

W_1

W_2