現代数学基礎 BI　4 月 19 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題. $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とし, また n を正整数とする. 実数成分の n 次正方行列全体のなす集合 $M(n;\mathbb{R})$ は, 行列の和とスカラー倍に関して $\mathbb{R}$ 上の線形空間になる. 特に $n=1$ の場合, $M(1;\mathbb{R})=\mathbb{R}$ 自身も $\mathbb{R}$ 上の線形空間である. 写像 $f\colon M(n;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ を, 行列 $A\in M(n;\mathbb{R})$ の行列式 $\det A\in\mathbb{R}$ を取る事で定める. つまり

$$f\colon M(n;\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(A)\coloneqq\det(A).$$

この写像が $\mathbb{R}$ 上の線形写像か否かを, 理由と共に答えよ.

解答. $n=1$ なら f は線形空間 $\mathbb{R}$ の恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ だから線形写像である. $n>1$ なら, $c\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1,0\}$ でスカラー倍すると $f(cA)=c^n f(A)\neq c\,f(A)$ となるから, 線形写像ではない.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.1 点でした.
一般の n に対する証明を行なっているが $n=1$ の場合分けが出来ていない人は 2 点, 特定の n ($n=2$ など) の場合の反例を挙げるにとどまった人は 1 点で採点しました.