2022・4・19

§2 部分空間

$\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ 又は $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$. 線形空間 := $\mathbb{K}$上の線形空間

§2.1.

<u>Dfn.2.1.1.</u> : 線形空間 V ($(V, +, 0, \cdot)$) の部分集合 W が <u>Vの部分空間</u>

$:\Longleftrightarrow$ (i) $0 \in W$

(ii) $\forall w, w' \in W \quad w + w' \in W$ (和で閉じている)

(iii) $\forall c \in \mathbb{K}, \forall w \in W \quad c \cdot w \in W$ (スカラー倍 〃) $\square$

<u>E.g. (Dfn.2.1.3, E.g.2.1.4)</u> V:線形空間, $v \in V$

$\{0\} \subset \mathbb{K}v := \{c \cdot v \mid c \in \mathbb{K}\} \subset V$ は Vの部分空間 $\square$

§2.2. 部分空間の和と生成系

<u>Lem.2.2.1., Prp.2.2.2, Dfn.2.2.3</u> : 線形空間

$W_1, W_2 \subset V$:部分空間 $\quad W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \in V \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$

$W_1, \ldots, W_n \subset V$: 〃 $\quad \sum_{i=1}^n W_i = W_1 + \cdots + W_n$

$:= \{\sum_{i=1}^n w_i \in V \mid w_i \in W_i \ (i=1, \ldots, n)\}$

任意の集合

$W_i \subset V \ (i \in I)$: 〃 $\quad \sum_{i \in I} W_i := \left\{ \sum_{i \in I} w_i \in V \,\middle|\, \begin{array}{l} w_i \in W_i, \ (i=1, \ldots, n) \\ \text{有限個を除いて } w_i = 0 \end{array} \right\}$

はどれも Vの部分空間. (<u>部分空間 W_i達の和空間</u>) $\square$

<u>Dfn.2.2.5.</u> V:線形空間

(1) $S \subset V$:部分集合

$\langle S \rangle := \sum_{s \in S} \mathbb{K}s \subset V$:部分空間 ($\mathbb{K}s \subset V$:部分空間)

: <u>Sが生成するVの部分空間</u> $= \mathbb{K}s_1 + \cdots + \mathbb{K}s_n$

$S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ の場合は $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ と書く.

(2) $\langle S \rangle$の元 $c_1 s_1 + \cdots + c_n s_n$ ($c_i \in \mathbb{K}, s_i \in S$) を Sの<u>一次結合</u>と呼ぶ

=

(3) 部分空間 $W \subset V$ に対し、$W = \langle S \rangle$ となる部分集合 S を W の生成元という. また W は S で生成される.(張られる)という. □

Rmk. 2.2.6. V: 線形空間, $S \subset V$: 部分集合
V が S を張る $\Leftrightarrow$ V の任意の元は S の一次結合で書ける. □

§2.3. 直積と直和

Lem. 2.3.1, Dfn. 2.3.2. V_i $(i \in I)$: 線形空間の族
直積集合 $\prod_{i \in I} V_i = \{(v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i\}$ は
$$(v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} = (v_i + w_i)_{i \in I}$$
$$0 := (0_{V_i})_{i \in I}$$
$$c.(v_i)_{i \in I} := (cv_i)_{i \in I}$$
で線形空間になる: 直積空間. □

Lem. 2.3.6. Dfn. 2.3.7. V_i $(i \in I)$: 線形空間の族
0_{V_i}
$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{(v_i) \in \prod_{i \in I} V_i \mid \text{有限コを除いて} v_i = 0\}$$
は直積空間の部分空間: 直和空間 □

Lem. 2.3.8 I が有限集合なら $\bigoplus_{i \in I} V_i = \prod_{i \in I} V_i$ □

記号 $\forall i \in I$ $V_i = V$ の時は $\prod_{i \in I} V =: V^I$ (Eg. 2.3.3, Dfn. 2.3.4)
$\bigoplus_{i \in I} V =: V^{\oplus I}$ (Dfn. 2.3.7)
$I = \{1, \ldots, n\}$ の時は $\prod_{i=1}^{n} V = V_1 \times \cdots \times V_n$
$\bigoplus_{i=1}^{n} V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ □
)) Lem. 2.3.8

§2.4. 部分空間の直和

Prp. 2.4.1. 2.4.3. V: 線形空間, $W_1, W_2 \subset V$: 部分空間

(i) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ (ii) 全射線形写像 $\varphi: W_1 \oplus W_2 \to W_1 + W_2$ は単射 (よって同型)

← これはいつも成立 $(w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2$

$\Leftrightarrow$ (iii) $W_1 + W_2$ の元を W_1 の元と W_2 の元の和で書く方法は一通り □

Dfn. 2.4.2. (1) 上の条件の一つが成立する時

$$W_1 \oplus W_2 := W_1 + W_2 \subset V \text{: 部分空間の直和}$$

(2) $V = W_1 \oplus W_2$ の時, これを Vの直和分解 という.

$\mathbb{N} := \{0,1,2,\cdots\}$ 非負整数の集合

Eg.23.9. & Ex.24.4. $\Bbbk[x] := \{ f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \mid n \in \mathbb{N},\ f_i \in \Bbbk \}$

: 多項式空間.

(1) $\Bbbk[x]$ は $\{1, x, x^2, \cdots\} = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ で生成される

(2) 写像 $\Bbbk[x] \longrightarrow \Bbbk^{\oplus \mathbb{N}}$

$$\begin{array}{ccc} \Bbbk[x] & \longrightarrow & \Bbbk^{\oplus\mathbb{N}} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i & \longmapsto & (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \end{array}$$

但し $i>n$ なら $f_i = 0$

は全単射な線形写像 (同型)

$\leftarrow \exists n \in \mathbb{N},\ n<i \Rightarrow f_i = 0$

(∵) 逆写像は $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i x^i \in \Bbbk[x]$

(3) $\Bbbk[x]_{\leq n} := \{ f \in \Bbbk[x] \mid n\text{次以下} \}$ は $\Bbbk[x]$ の部分空間.

$\{1, x, \cdots, x^n\}$ で生成される

(4) $f \in \Bbbk[x]$:

$(f) := \{ fg \mid g \in \Bbbk[x] \} \subset \Bbbk[x]$ は部分空間

(5) $f \in \Bbbk[x]$: n次式 ($f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i,\ f_n \neq 0$)

$\Bbbk[x] = (f) \oplus \Bbbk[x]_{\leq n-1}$ 直和分解

(∵) $(f) \ni fg$ の次数は $g \neq 0$ なら n 以上

∴ $(f) \cap \Bbbk[x] = \{0\}$.

∴ $(f) \oplus \Bbbk[x]_{\leq n-1} = (f) + \Bbbk[x]_{\leq n-1}$ $(\subset \Bbbk[x])$

あとは $(f) + \Bbbk[x]_{\leq n-1} = \Bbbk[x]$ を示せばよいが,

$\forall h \in \Bbbk[x]$ を f で割ると

$h = fg + r$ g:商 r:余り (剰余の定理)

$\deg r < \deg f = n$ より $r \in \Bbbk[x]_{\leq n-1}$

$fg \in (f)$

∴ $\Bbbk[x] = (f) + \Bbbk[x]_{\leq n-1}$