現代数学基礎 BI　 4 月 12 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2022B1.html

問題． n を正の整数とし, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ とする．(i,j) 成分が x_i^{j-1} の 5 次正方行列に関する次の等式 (Vandermonde の行列式) を示せ．

$$\det\bigl(x_i^{j-1}\bigr)_{1 \le i,j \le 4} = \prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i).$$

解答． 一般の正整数 n について, (i,j) 成分が x_i^{j-1} の n 次正方行列の行列式が

$$\det(x_i^{j-1})_{1 \le i,j \le n} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

となることを示せばよい．更に複素数 x_i 達は可換 (積が可換: $x_i x_j = x_j x_i$) な文字に置き換えて示せば十分．行列式の定義より左辺は x_i 達の多項式で, それを $p(x) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と表す．具体的には, n 文字 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換 σ の符号を $\mathrm{sign}(\sigma)$ と書くと

$$p(x) = \sum_{\sigma :\ n\ \text{文字の置換}} \mathrm{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)}^0 x_{\sigma(2)}^1 \cdots x_{\sigma(n)}^{n-1}. \tag{1}$$

また右辺を $q(x) \coloneqq \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$ と書く．示すべき事は $p(x) = q(x)$ である．

二つの行が等しい行列の行列式は 0 だから, 任意の $j = 1, 2, \ldots, n$ と任意の $i \ne j$ について, $x_j = x_i$ とすると $p(x) = 0$ (あらわに書くと $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j = x_i, \ldots, x_n) = 0$)．すると多項式の剰余の定理から, $p(x)$ は $x_j - x_i$ で割り切れる．$i \ne j$ は任意に取っていて, また $x_i - x_j = -(x_j - x_i)$ だから, $p(x)$ は $\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = q(x)$ で割り切れる．よって x_i 達の多項式 $r(x)$ を用いて $p(x) = q(x) r(x)$ と書ける．

次に $r(x)$ が定数であることを示す．各 $x_1, \ldots, x_n$ を次数 1 と数えて, その時の斉次多項式 $f(x)$ の次数 (つまり全次数) を $\deg f(x)$ と表す．定義から右辺 $q(x)$ は斉次多項式で

$$\deg q(x) = \#\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n\} = \binom{n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1).$$

一方 (1) より左辺 $p(x)$ も斉次多項式で, $\deg p(x) = 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \binom{n}{2}$．よって $\deg p(x) = \deg q(x)$．この事と $p(x) = q(x) r(x)$ から $\deg r(x) = 0$, つまり $r(x)$ が定数であることが分かる．

最後に $r = 1$ であることを示す．(1) より, $p(x)$ における単項式 $m \coloneqq x_1^0 x_2^1 \ldots x_n^{n-1}$ の係数は恒等置換 id の符号だから $\mathrm{sign}(\mathrm{id}) = 1$．一方 $q(x)$ における m の符号も 1．よって $r = 1$．

コメント． 3 点満点で採点しました．平均点は 2.8 点でした．

模範解答のように解いていた方は全体の 1 割程度しかいませんでした．行列式の交代性 (二つの行又は二つの列を置換すると値の符号が変わる) をよく復習しておいて下さい．

行列式を展開して直接計算しても示せますが, その方針の場合, 不明瞭な式変形をしていたり不要な場合分けをしている場合には, その都度 1 点ずつ減点しています．

以上です．