2022・4・12

§1 線形空間

$\mathbb{Q} := \{$任意の有理数$\} \subset \mathbb{R} := \{$任意の実数$\} \subset \mathbb{C} := \{$任意の複素数$\}$

§1.2. 線形空間の定義.

$\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ 又は $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ （一般の体でも良い）

definition（定義）

Dfn. 1.2.1. $\mathbb{K}$上の線形空間とは

集合 V:
写像 $+ : V \times V \to V$ （和）
元 $0 \in V$ （零元）
写像 $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ （スカラー倍）

からなる組 $(V, +, 0, \cdot)$ で以下の7条件をみたすもの.

$(V, +, 0)$
(1) $\forall u, v, w \in V \quad (u+v)+w = u+(v+w)$ ［和の結合性］
(2) $\forall v \in V \quad v+0 = 0+v = v$
(3) $\forall v \in V \quad \exists -v \in V \quad v+(-v) = (-v)+v = 0$
(4) $\forall v, w \in V \quad v+w = w+v$ ［和の可換性］

+と.
(5) $\forall v, w \in V, \ \forall c \in \mathbb{K} \quad c\cdot(v+w) = c\cdot v + c\cdot w$
(6) $\forall v \in V \ \forall c, d \in \mathbb{K} \quad (c+d)\cdot v = c\cdot v + d\cdot v, \quad (cd)\cdot v = c\cdot(d\cdot v)$
(7) $\forall v \in V \quad 1\cdot v = v$ □

例

E.g. 1.2.5. $\mathbb{K}^n = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle| \ v_i \in \mathbb{K} \right\}$

$v + w := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}, \quad c\cdot v := \begin{pmatrix} cv_1 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix} \quad 0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$(\mathbb{K}^n, +, 0, \cdot)$ は $\mathbb{K}$上の線形空間

これを $\mathbb{K}$上の数ベクトル空間と呼ぶ

(1) $(u+v)+w$ の第i成分は $(u_i+v_i)+w_i$

$u+(v+w)$ 〃 $u_i+(v_i+w_i)$

$\mathbb{K}$の和の結合律から $(u_i+v_i)+w_i = u_i+(v_i+w_i)$

$\forall i=1,\dots,n$ でこれが成立するので $(u+v)+w=u+(v+w)$

(2) $v+0,\ 0+v,\ v\in\mathbb{K}^n$ の第i成分は $v_i+0,\ 0+v_i,\ v_i$

$\mathbb{K}$において $v_i+0=0+v_i=v_i$ ∴ $v+0=0+v=v$

(3) $v+(-v),\ (-v)+v,\ 0\in\mathbb{R}^n$ の第i成分は $v_i+(-v_i),\ (-v_i)+v_i,\ 0$

$\mathbb{K}$においてこれらは等しい. ∴ $v+(-v)=(-v)+v=0$

(4) $v+w,\ w+v\in\mathbb{K}^n$ の第i成分は $v_i+w_i,\ w_i+v_i$

$\mathbb{K}$の和は可換だから $v_i+w_i=w_i+v_i$. ∴ $v+w=w+v$.

(5) $c\cdot(v+w),\ c\cdot v+c\cdot w$ の第i成分は $c(v_i+w_i),\ cv_i+cw_i$

$\mathbb{K}$の和と積の分配律から $c(v_i+w_i)=cv_i+cw_i$ ∴ $c\cdot(v+w)=c\cdot v+c\cdot w$

(6) $(c+d)\cdot v,\ c\cdot v+d\cdot v$ の第i成分は $(c+d)v_i,\ cv_i+dv_i$

$\mathbb{K}$の分配律から $(c+d)v_i = cv_i+dv_i$ ∴ $(c+d)\cdot v=c\cdot v+d\cdot v$

$(cd)\cdot v,\ c\cdot(d\cdot v)$ の第i成分は $(cd)v_i,\ c(dv_i)$

$\mathbb{K}$の積の結合律から $(cd)v_i=c(dv_i)$ ∴ $(cd)\cdot v=c\cdot(d\cdot v)$

(7) $1\cdot v,\ v$ の第i成分は $1v_i,\ v_i$.

$\mathbb{K}$において $1\cdot v_i=v_i$ ∴ $1\cdot v=v$ □

講義では省略

Remark (注意)

Rmk.1.2.2 線形空間 $(V,+,0,\cdot)$ のことを V と略記する．
$\mathbb{K}$ のことを V の係数体という $\square$

Dfn.1.2.7. 一点集合 $\{0\}$，和 $0+0=0$，スカラー倍 $c\cdot 0=0$ $(c\in\mathbb{K})$
からなる組 $(\{0\},+,0,\cdot)$ は $\mathbb{K}$ 上の線形空間
これを零空間という． $\square$

Dfn.1.2.8. 線形空間 V の元 $v_1,\dots,v_n$ に対し
$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \qquad (c_i\in\mathbb{K})$$
と書ける V の元のことを $v_1,\dots,v_n$ の線形結合という $\square$
(又は 一次結合)

§1.3. 線形空間の例

proposition (命題)

$f: S\to\mathbb{K}$ 函数

Prp.1.3.2. 集合 S から $\mathbb{K}$ への写像全体の集合 $\mathbb{K}^S$ は，
$f,g\in\mathbb{K}^S$ に対し $f+g\in\mathbb{K}^S$ を $(f+g)(s):=f(s)+g(s)$ $\forall s\in S$
$0\in\mathbb{K}^S$ を $0(s):=0\in\mathbb{K}$
$c\in\mathbb{K}$, $f\in\mathbb{K}^S$ に対し $c\cdot f\in\mathbb{K}^S$ を $(c\cdot f)(s)=c\cdot f(s)$

$\mathbb{K}$ の和

$\mathbb{K}$ の積

によって $\mathbb{K}$ 上の線形空間になる．
これを S 上の $\mathbb{K}$ 値函数空間と呼ぶ． $\square$

lemma (補題)

Lem.1.3.3. $I\subset\mathbb{R}$：空でない開区間．
$C^\infty(I):=\{f: I\to\mathbb{R}\mid \forall x\in I\ f$ は x で任意回微分可能$\}\subset\mathbb{R}^I$
は $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, $0(x):=x$, $(c\cdot f)(x):=c\cdot f(x)$ $(x\in I)$
によって $\mathbb{R}$ 上の線形空間になる．これを I 上の滑らかな函数の空間と呼ぶ

§1.4. 線形写像

Dfn. 1.4.1. V, W : $\mathbb{K}$ 上の線形空間
写像 $f : V \to W$ は次の条件を満たす時、$\mathbb{K}$ 上の線形写像という

(i) $\forall v, v' \in V$ $\quad f(v+v') = f(v) + f(v')$

Vの和 ⤴ ⤴ Wの和

(ii) $\forall c \in \mathbb{K}$ $\forall v \in V$ $\quad f(c \cdot v) = c \cdot f(v)$ $\square$

Vのスカラー倍 ⤴ ⤴ Wのスカラー倍

Eg. 1.4.2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ m行n列行列. $a_{ij} \in \mathbb{K}$

$l_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, $v \longmapsto Av$

は $\mathbb{K}$ 上の線形写像.

$\because$ $l_A(v+v') = A(v+v') = Av + Av'$

$= l_A(v) + l_A(v')$

$l_A(cv) = A(cv) = c(Av) = c \cdot l_A(v)$ $\square$