2021 年度 京都大学 集中講義　講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (名古屋大学 多元数理科学研究科)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

目次

[*1] ver. 2021.12.24.13:00

0　はじめに

この文書は 2021 年度秋学期 (12/20–24) の京都大学で行う, 学部生・大学院生向け集中講義の講義ノートです. この節では講義の概要を説明します.

Hall 代数と呼ばれる代数構造が近年様々な数学に現れています. この講義の最初の目標は, 代数系の分野の人やそれに興味を持っている人を対象に, Hall 代数の入門的な概説をすることです.

以下の話題を解説します. (ノートの初期版では 5 つ目にモチーフ的 Hall 代数がありましたが, 時間が無くなり 4 つになりました.)

(1) 古典的 Hall 代数
(2) Ringel-Hall 代数と量子群
(3) Bridgeland の Hall 代数
(4) Toën の導来 Hall 代数

とりあえず「Hall 代数とは何か」をざっくり知りたい方は §2.6 をご覧ください.

単位が欲しい学生の方へ (Course Evaluation Method)

各節の最後の副節にレポート問題をまとめて掲載しています. 3 題以上解いて提出して下さい.

The report problems are given in the final subsection of each section. Submit your answers for more than or equal to three problems.

記号・用語

以下は全体を通じて用いる記号・用語の説明です.

- $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ で非負整数のなす集合を表します.
- 有限集合 S に対して $|S|$ または $\#S$ で S の濃度を表します.
- 圏 C に対し $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ で対象全体のなすクラスを表します. また $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ に対して射集合を $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ で表します (定義 1.1.2 も参照して下さい).
- 圏 C の対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ に対して, X と Y が同型であることを $X \simeq Y$ で表します.

1　古典的 Hall 代数 (12/20)

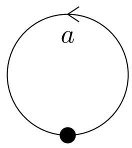
現在「Hall 代数」と呼ばれているものには様々なものがありますが, 歴史的に最初に登場するのが**古典的 Hall 代数** (classical Hall algebra) で, それをこの節で解説します.

次節で説明するように, 古典的 Hall 代数は **Jordan 箙の冪零表現圏の Ringel-Hall 代数**に他なりません. その為, 論理的にはまず Ringel-Hall 代数を導入し, 次にその例として古典的 Hall 代数を説明するのが自然です. しかしこの集中講義では, 先に古典的 Hall 代数で色々と遊んでから一般の Ringel-Hall 代数に進みます.

この節で仮定するのは線形代数の知識だけです. 所々で圏や Abel 圏, 多元環や箙の表現論の用語が出てきますが, 本質的には不要です.

1.1　Jordan 箙の冪零表現圏

有向グラフのことを箙と呼びます. そのうち, 一つの頂点 $\bullet$ と一つのループ $a\colon \bullet \to \bullet$ からなるものを **Jordan 箙**と呼びます (下図参照). この講義ノートでは Q_{Jor} で Jordan 箙を表します.



Jordan 箙 Q_{Jor} の体 F 上の表現圏 $\mathsf{Rep}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ を考えましょう. この圏は次のように記述されます.

- 対象は F 上の有限次元線形空間 V とその自己準同型 $x \in \mathrm{End}_F(V)$ の組 (V, x).
- (V, x) から (W, y) への射は F 線形写像 $f\colon V \to W$ であって次の図式を可換にするもの.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & W \arrow[d, "y"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

- 射の合成は線形写像の合成.

圏 $\mathsf{Rep}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ は F 線形です. つまり任意の対象 I と I' に対して, 射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Rep}_F Q_{\mathrm{Jor}}}(I, I')$ は F 線形空間です. また次の主張から Abel 圏であることも分かります (一般の箙 Q の表現圏と道代数 FQ の有限生成加群圏とが同値であることの特別な場合です).

補題 1.1.1. $\mathsf{Rep}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ は一変数多項式環 $F[t]$ の (右) 加群であって F 上有限次元なもののなす圏 $\mathsf{mod}\, F[t]$ と同値.

略証. $(V, x) \in \mathsf{Rep}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ に対し, V への t の作用を x で定めることで $F[t]$ 加群が得られる. この対応が圏同値を与える. □

古典的 Hall 代数に関係するのは, **冪零表現のなす $\mathsf{Rep}_F\, Q_{\mathbf{Jor}}$ の忠実部分圏**

$$\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}}\, Q_{\mathrm{Jor}}$$

です. つまり圏 $\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}}\, Q_{\mathrm{Jor}}$ の対象は

- 有限次元線形空間 V と**冪零**な自己準同型 $x \in \mathrm{End}_F(V)$ の組 (V, x)

であり, 射の集合と合成は $\mathsf{Rep}_F Q_{\mathrm{Jor}}$ と全く同様に定めます．また $x \in \mathrm{End}_F(V)$ が冪零であるとは, ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $x^n = 0$ であることを言います．$\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}}$ は $\mathsf{Rep}_F Q$ の部分 Abel 圏です．

論理的な順番が前後しますが, この講義ノートにおける圏の取り扱いに関してここで注意と用語を与えます．

定義 1.1.2. この講義ノートで圏といったら局所的に小 (locally small), つまり任意の対象 a, b に対して射のクラス $\mathrm{Hom}(a, b)$ が集合であるもののこととする．また, 圏 C の対象の同型類全体のなすクラス $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ が集合である時, 圏 C を**本質的に小** (essentially small) だと言う．本質的に小である圏 C の対象の同型類のなす集合を $\mathrm{Iso}(\mathsf{C})$ で表す．また C の対象 M に対して, $[M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{C})$ で M の同型類を表す．

C が上記の $\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}}$ の場合, 同型類の集合 $\mathrm{Iso}(\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}})$ はどうなるでしょうか? まず $\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}}$ の同型 $f \colon (V, x) \to (W, y)$ とは, 線形同型 $f \colon V \xrightarrow{\sim} W$ であって $fx = yf$ を満たすもののことです．すると Jordan 標準形の理論から次の主張が従います．

補題 1.1.3. Jordan 箙の体 k 上の冪零表現の圏 $\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}}$ の, 対象の同型類のなす集合は

$$\mathrm{Iso}(\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}}) = \{[I_\lambda] \mid \lambda \in \mathrm{Par}\}.$$

ここで以下のような記号・用語を用いた．

- Par は全ての分割がなす集合を表す．但し分割とは, 有限長の非負整数の非増大列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$ のことであり, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$ のように 0 を付け加えた分割は同一視する．そして空数列も $\emptyset = () = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{Par}$ のように分割と見なす．
- 対角成分が 0 の n 次 Jordan 細胞を $J_n \in \mathrm{End}_F(F^n)$ で表す．F^n の標準基底に関する行列で書くと

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

- 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ に対して $\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}}$ の対象 I_λ を次で定める．

$$I_\lambda := (F^{|\lambda|}, J_\lambda), \quad J_\lambda := J_{\lambda_1} \oplus J_{\lambda_2} \oplus \cdots. \tag{1.2}$$

  但し $|\lambda| := \sum_{i \geq 1} \lambda_i$．また $I_\emptyset := 0 = (\{0\}, 0)$ と定める．

注意. 分割に関する記号・用語は Macdonald の対称函数の本 [M95, Chap. I, §1] に従っています．

証明. 任意の $\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}}$ の対象 (V, x) に対して, x は冪零だからその固有値は全て 0．Jordan 標準形の理論 (単因子論) から, F 線形同型 $f \colon V \to F^{|\lambda|}$ と $f \circ x \circ f^{-1} = J_\lambda$ を満たす分割 λ が一意に存在する．この f が圏 $\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}}$ の同型射 $(V, x) \xrightarrow{\sim} I_\lambda$ を与える． □

既に触れたように Q_{Jor} の表現圏 $\mathsf{Rep}_F Q_{\mathrm{Jor}}$ は Abel 圏です．その構造を書き下すと以下の様になります．

定義 1.1.4. $\mathsf{Rep}_F Q_{\mathrm{Jor}}$ は以下の構造によって Abel 圏である．

- 零対象は零空間と零写像からなる零表現 $0 = (\{0\}, 0)$.
- 対象 $M = (V, x)$ と $N = (W, y)$ の直和は, 線形空間の直和と線形写像の直和とで定まる直和表現 $M \oplus N := (V \oplus W, x \oplus y)$.

- 射 $f\colon (V,x) \to (W,y)$ の核は, 線形写像としての f の核 $\operatorname{Ker} f \hookrightarrow V$ で定まる表現 $(\operatorname{Ker} f, x|_{\operatorname{Ker} f})$.
- 射 $f\colon (V,x) \to (W,y)$ の余核は, 線形写像としての f の余核 $W \twoheadrightarrow \operatorname{Cok} f$ 及び y が誘導する自己準同型 $\overline{y} \in \operatorname{End}_K(\operatorname{Cok} f)$ で定まる表現 $(\operatorname{Cok} f, \overline{y})$.

また $\mathsf{Rep}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ には部分表現や商表現の概念が定まります.

定義 1.1.5. Q_{Jor} の表現 $N=(W,y)$ の**部分表現**とは, 表現 $M=(V,x)$ であって V が W の線形部分空間であり $x = y|_V$ となるもののことをいう. この時 $M \subset N$ と書く.

また部分表現 $M=(V,y|_V) \subset N=(W,y)$ に対し, M の**商表現**を $N/M := (W/V, \overline{y})$ で定義する. 但し $\overline{y}$ は y が誘導する V/W の自己準同型.

更に, 環上の加群に関する単純加群 (simple module) や直既約加群 (indecomposable module) の類似として, $\mathsf{Rep}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ に次のような概念が考えられます.

- 非自明な部分表現 (自分自身と零表現以外の部分表現) を持たない表現を既約表現 (irreducible representation) と呼ぶ.
- 零表現ではない部分表現の二つの直和ではない表現を完全可約表現 (completely reducible representation) と呼ぶ.

この講義ノートでは, それぞれ $\mathsf{Rep}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ の**単純対象** (simple object) 及び**直既約対象** (indecomposable object) と呼びます.

補題 1.1.6. $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ の単純対象は $I_{(1)} = (k,0)$ と同型であり, 直既約対象は $I_{(n)} = (F^n, J_n)$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ と同型.

証明. Q_{Jor} の表現 (V,x) について, $\dim_F V > 1$ ならそれは非自明な部分表現 $(V,0)$ を持つ. 従って (V,x) が単純ならば $\dim_F V = 1$ であり, x は冪零なので $x=0$. 後半は前半から直ちに従う. □

また Jordan 標準形の理論は次の主張も意味しています. Krull-Schmidt 性はこの節では表立って使いませんが, 次節以降で所々現れます.

命題 1.1.7. $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ は **Krull-Schmidt 性**を持つ. つまり, 任意の対象 $M \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ は有限個の直既約対象 $I_1, \ldots, I_r$ の直和で書けて, 個数 r は M から一意に定まり, また同型類の列 $[I_1], \ldots, [I_r]$ は置換を除いて一意に決まる.

最後に, 少々天下り的ですが, 分割 λ, μ, ν に対して「部分表現のなす集合」$G^{\nu}_{\lambda,\mu}$ を導入します. これは古典的 Hall 代数の環構造 (及び余代数構造) を定めるときに使います.

定義 1.1.8. $\lambda, \mu, \nu \in \mathrm{Par}$ に対して

$$G^{\nu}_{\lambda,\mu}(F) = G^{\nu}_{\lambda,\mu} := \{M \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F\, Q_{\mathrm{Jor}} \mid M \subset I_\nu,\ M \simeq I_\mu,\ I_\nu/M \simeq I_\lambda\}.$$

ここで $M \subset I_\mu$ は M が I_μ の部分表現であることを, I_ν/M は商表現 (定義 1.1.5) を, $\simeq$ は圏 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F\, Q_{\mathrm{Jor}}$ での同型を意味する. また I_ν/M は商対象.

$G^{\nu}_{\lambda,\mu}$ がどのようなものになるか, 幾つか例を見ましょう. 以下, 成分が 1 のみの長さ n の分割を $(1^n) := (1,1,\ldots,1)$ と略記します. また体 F 上の線形空間 V と $m \in \mathbb{N}$ に対して Grassmann 多様体を

$$\mathrm{Gr}(m,V) := \{W \subset V \mid \text{次元 } m \text{ の部分線形空間}\}$$

と書きます．Grassmann 多様体は F 上の非特異射影多様体ですが，この節では単に (F 値点の) 集合と見なせば十分です．

補題 1.1.9. $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$ とする．

(1) $G^{(1^n)}_{(1^{n-m}),(1^m)}(F) = \mathrm{Gr}(m, F^n)$.

(2) $G^{(n)}_{(n-m),(m)}$ は 1 点集合．

証明． (1) $I_{(1^m)} \simeq I_{(1)}^{\oplus m} = (F^m, 0)$ に注意すると

$$\begin{aligned} G^{(1^n)}_{(1^{n-m}),(1^m)} &= \{M \subset I_{(1)}^{\oplus n} \mid M \simeq I_{(1)}^{\oplus m},\ I_{(1)}^{\oplus n}/M \simeq I_{(1)}^{\oplus n-m}\} \\ &= \{W \subset F^n \mid \text{部分線形空間},\ W \simeq F^m\}. \end{aligned}$$

右辺は Grassmann 多様体に他ならない．

(2) $I_{(n)}, I_{(m)}, I_{(n-m)}$ が直既約であること (補題 1.1.6)，及び $I_{(n)} = (F^n, J_n)$ で J_n は行列表示 (1.1) できたことを思い出しておく．$x := J_n$ 及び $v := e_n \in F^n$ (標準基底の n 番目の元) と書くと，$x^i(v) = e_{n-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $x^n(v) = 0$ だから $F^n = Fv + Fx(v) + \cdots + Fx^{n-1}(v)$. その m 次元部分表現であって商表現が直既約になるものは $Fx^{n-m}(v) + \cdots + Fx^{n-1}(v)$ しか存在しない．

□

また次の主張が成立します．

補題 1.1.10. 分割 λ, μ, ν に対し，$G^{\nu}_{\lambda,\mu} \neq \emptyset$ なら $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$.

証明． $M = (V, x) \in G^{\nu}_{\lambda,\mu}$ なら同型 $M \simeq I_\mu$ 及び $I_\nu/M \simeq I_\lambda$ がある．線形空間の部分を見ると $\dim_F V = |\mu|$ かつ $|\nu| - \dim_F V = |\lambda|$. □

1.2 環構造

それでは古典的 Hall 代数を導入します．後のこともあるので，まず環構造の形式的定義を与えておきます．

定義 1.2.1. 体 k 上の線形空間 A と線形写像 $\mu\colon A \otimes A \to A$ があって次の図式が可換であるとき，組 (A, μ) を (結合) k **代数**と呼び，μ を積と呼ぶ，

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}$$

μ を二項演算の記号で，例えば $*$ と書き，合わせて (A, μ) のことを $(A, *)$ と書くこともある．

更に線形写像 $\eta\colon k \to A$ があって次の図式が可換であるとき，組 (A, μ, η) を**単位的** k **代数**，i を単位射と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & k \otimes A \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[d, "\simeq"] \\ A \otimes k \arrow[u, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\simeq"'] & A \end{tikzcd}$$

η は単位元 $1 \in k$ の像 $1_A := \eta(1)$ で決まるので，(A, μ, η) のことを $(A, *, 1_A)$ と書いたりする．

引き続き Jordan 箙の冪零表現圏 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F Q_{\mathrm{Jor}}$ を考えますが, **この副節では基礎体を有限体**とします: $F=\mathbb{F}_q$. ここで q は体の位数を表していて, 従って素数冪です. 補題 1.1.3 から $\mathrm{Iso}(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}})=\{[I_\lambda]\mid\lambda\in\mathrm{Par}\}$ でした. また定義 1.1.8 の $G^\nu_{\lambda,\mu}(\mathbb{F}_q)$ も思い出して下さい.

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ を

$$\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}:=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Par}}\mathbb{C}[I_\lambda]$$

で定義します. これが古典的 Hall 代数の下部線形空間 (underlying liner space) です.

定理 1.2.2. $\mathbb{C}$ 線形写像 $*$: $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}\to\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ を, まず基底 $\{[I_\lambda]\mid\lambda\in\mathrm{Par}\}$ に対して

$$[I_\lambda]*[I_\mu]:=\sum_{\nu\in\mathrm{Par}}\left|G^\nu_{\lambda,\mu}(\mathbb{F}_q)\right|[I_\nu]$$

で定め, 一般の元に対しては $\mathbb{C}$ 線形に拡張して定めることができる. この時 $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}},*)$ は結合 $\mathbb{C}$ 代数で, $[I_\emptyset]=[0]$ はその単位元である. また

$$\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{H}^n_{\mathrm{cl}},\quad \mathbf{H}^n_{\mathrm{cl}}:=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Par},\ |\lambda|=n}\mathbb{C}[I_\lambda],$$

つまり $\deg([I_\lambda]):=|\lambda|$ とすることで, $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}},*,1)$ は $\mathbb{N}$ 次数付き代数である. この単位的 $\mathbb{C}$ 代数を**古典的 Hall 代数**と呼ぶ.

以降の副節で説明するように, $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ には環構造の他に色々な代数構造が入りますが, それらも単に古典的 Hall 代数と呼ぶことにします.

証明. まず積 $*$ が well-defined であることを示す. $\left|G^\nu_{\lambda,\mu}\right|$ は有限であり, また $\sum_{\nu\in\mathrm{Par}}$ は有限和であることを示せばよい. 前半は, $I_\nu=(F^{|\nu|},J_\nu)$ の部分対象 $M=(V,x)$ が有限個しかないことから従う. 実際, V は $F^{|\nu|}$ の部分線形空間であり, また $x=J_\nu|_V$ だから, M は V から一意に定まる. $F=\mathbb{F}_q$ と仮定しているから, V の選び方は有限個しかない. 後半は, 補題 1.1.10 より $G^\nu_{\lambda,\mu}\neq\emptyset$ ならば $|\lambda|+|\mu|=|\nu|$ で, そのような分割 ν は有限個しかないことから従う.

次に積 $*$ の結合性について. μ と $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\dots,\lambda^{(n)}$ を分割として,

$$\begin{aligned}&G^\mu_{\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\dots,\lambda^{(n)}}(F)\\&:=\{M_\bullet=(I_\mu=M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_n\supset M_{n+1}=0)\mid M_i/M_{i+1}\simeq I_{\lambda^{(i)}}\ (i=1,\dots,n)\}\end{aligned}\tag{1.3}$$

を $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F Q_{\mathrm{Jor}}$ の部分対象からなる列の集合とする (特に $G^\nu_{\lambda,\mu}(F)$ は $n=2$ の場合). すると $*$ の結合性は次の主張から従う.

補題 1.2.3 (積 $*$ の結合性). 分割 λ,μ,ν に対して

$$[I_\lambda]*([I_\mu]*[I_\nu])=\sum_{\rho\in\mathrm{Par}}\left|G^\rho_{\lambda,\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)\right|[I_\rho]=([I_\lambda]*[I_\mu])*[I_\nu].$$

証明. $g^\nu_{\lambda,\mu}:=\left|G^\nu_{\lambda,\mu}\right|=\left|G^\nu_{\lambda,\mu}\right|$ 等と略記する. 最初の等号について, 積の定義から

$$[I_\lambda]*([I_\mu]*[I_\nu])=[I_\lambda]*\sum_{\alpha\in\mathrm{Par}}g^\alpha_{\mu,\nu}[I_\alpha]=\sum_{\alpha,\rho\in\mathrm{Par}}g^\alpha_{\mu,\nu}g^\rho_{\lambda,\alpha}[I_\rho].$$

$\sum_{\alpha\in\mathrm{Par}} g^{\alpha}_{\mu,\nu} g^{\rho}_{\lambda,\alpha}$ は集合 $\bigsqcup_{\alpha\in\mathrm{Par}} G^{\alpha}_{\mu,\nu} \times G^{\rho}_{\lambda,\alpha}$ の濃度で，この集合は

$$\begin{aligned}&\bigsqcup_{\alpha\in\mathrm{Par}} \{N \subset I_\alpha \mid N \simeq I_\nu,\, I_\alpha/N \simeq I_\mu\} \times \{A \subset I_\rho \mid A \simeq I_\alpha,\, I_\rho/A \simeq I_\lambda\} \\ &= \{N \subset A \subset I_\rho \mid I_\rho/A \simeq I_\lambda,\, A/N \simeq I_\mu,\, N \simeq I_\nu\} = G^{\rho}_{\lambda,\mu,\nu}\end{aligned} \tag{1.4}$$

と書き換えられる．よって最初の等号が成立する．

二番目の等号については

$$([I_\lambda] * [I_\mu]) * [I_\nu] = \sum_{\beta,\rho\in\mathrm{Par}} g^{\beta}_{\lambda,\mu} g^{\rho}_{\beta,\nu} [I_\rho]$$

となって，$\sum_{\beta\in\mathrm{Par}} g^{\beta}_{\lambda,\mu} g^{\rho}_{\beta,\nu}$ は次の集合の濃度です．

$$\begin{aligned}&\bigsqcup_{\beta\in\mathrm{Par}} \{M \subset I_\beta \mid M \simeq I_\mu,\, I_\beta/M \simeq I_\lambda\} \times \{N \subset I_\rho \mid N \simeq I_\nu,\, I_\rho/N \simeq I_\beta\} \\ &= \{(N, M) \mid N \subset I_\rho,\, N \simeq I_\nu,\, M \subset I_\rho/N,\, M \simeq I_\mu,\, (I_\rho/N)/M \simeq I_\lambda\} =: \widetilde{G}^{\rho}_{\lambda,\mu,\nu}.\end{aligned}$$

これと $G^{\rho}_{\lambda,\mu,\nu}$ が全単射であることを示せばよい． 第三同型定理を思い出すと $I_\rho \supset A \supset N$ に対して $(I_\rho/N)/(A/N) \simeq I_\rho/A$. 従って

$$G^{\rho}_{\lambda,\mu,\nu} = \{N \subset A \subset I_\rho \mid I_\rho/A \simeq I_\lambda,\, A/N \simeq I_\mu,\, N \simeq I_\nu\} \longrightarrow \widetilde{G}^{\rho}_{\lambda,\mu,\nu}, \quad (N, A) \longmapsto (N, A/N)$$

は全単射． □

$\mathbb{N}$ 次数付き代数であることは補題 1.1.10 から従う．また零表現が $*$ の単位元であることは簡単に確認できるので，詳細は略す． □

注意 1.2.4. 結合性の証明で本質的だったのは第三同型定理を使う所で，これは $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}}$ に限らない一般の Abel 圏でも適用できます．この視点を推し進めると次節の Ringel-Hall 代数にたどり着きます．

注意 1.2.5. $*$ の構造定数が整数であることから，$\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ の代わりに ($\mathbb{Z}$ 上の) 自由加群

$$\mathbf{H}_{\mathrm{cl},\mathbb{Z}} \coloneqq \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Par}} \mathbb{Z}[I_\lambda]$$

を考えても良いです．以下で述べる $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ の環構造に関する議論も適切な変更の下で $\mathbf{H}_{\mathrm{cl},\mathbb{Z}}$ に対して成立します．

補題 1.2.3 の証明の前半の議論，特に (1.4) が拡張できて，それによって次の主張を示すことができます (次節の補題 2.1.8 も参照して下さい)．

系 1.2.6. μ と $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$ を分割として，$G^{\mu}_{\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\ldots,\lambda^{(n)}}(F)$ を (1.3) で定めた部分対象の列の集合とすると

$$[I_{\lambda^{(1)}}] * [I_{\lambda^{(2)}}] * \cdots * [I_{\lambda^{(n)}}] = \sum_{\mu\in\mathrm{Par}} \left| G^{\mu}_{\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(n}}(\mathbb{F}_q) \right| \cdot [I_\mu]. \tag{1.5}$$

注意 1.2.4 で触れたように，より一般の Abel 圏についても Hall 代数が構成できます．しかし，この副節の以降の部分では圏 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}}$ の特殊事情を見ておきます．

命題 1.2.7. $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}, *)$ は可換環．

証明. 任意の分割 λ,μ,ν に対して全単射 $G^{\nu}_{\lambda,\mu} \xrightarrow{\sim} G^{\nu}_{\mu,\lambda}$ を与えればよい (以下の議論は基礎体 F は任意の体で成立するので, $\mathbb{F}_q$ 依存性を表記していない). $M=(V,x)\in \mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F Q_{\mathrm{Jor}}$ について, V の線形双対 V^* と $x\colon V\to V$ の転置 ${}^t x\colon V^*\to V^*$ から $M^* := (V^*, {}^t x)\in \mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F Q_{\mathrm{Jor}}$ が得られる. $I^*_\nu \simeq I_\nu$ に注意する (問題 1.1). $M\in G^{\nu}_{\lambda,\mu}(\mathbb{F}_q)=\{M\subset I_\nu \mid M\simeq I_\mu,\ I_\nu/M\simeq I_\lambda\}$ に対し $M^\perp := \{\xi\in I^*_\nu \mid \xi(M)=0\}$ を考えると, $M^\perp\simeq I_\lambda$ かつ $I^*_\nu/M^\perp\simeq I_\mu$. この対応 $M\mapsto M^\perp$ が次の全単射を与える.

$$G^{\nu}_{\lambda,\mu} \xrightarrow{\sim} \{L\subset I^*_\nu\simeq I_\nu \mid L\simeq I_\lambda,\ I^*_\nu/L\simeq I_\mu\} = G^{\nu}_{\mu,\lambda}.$$

□

$(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}},*)$ の構造はより詳しく分かっていて, 実は無限変数の多項式環と見なせます.

定理 1.2.8. $\mathbb{C}$ 代数として $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}},*)\simeq \mathbb{C}\big[[I_{(1)}],[I_{(1^2)}],\dots\big]$.

証明の前に, 分割 λ の重複度を表す記号

$$m_i(\lambda) := \{j\in\mathbb{Z}_{>0} \mid \lambda_j = i\}$$

を導入しておきます. これを使って λ は $\lambda=(1^{m_1(\lambda)},2^{m_2(\lambda)},\dots)$ と表せます.

証明. $\lambda=(1^{l_1},2^{l_2},\dots,n^{l_n})$ とし,

$$X_\lambda := [I_{(1^{l_n})}] * [I_{(1^{l_{n-1}+l_n})}] * \cdots * [I_{(1^{l_1+\cdots+l_n})}] \ \in \mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$$

を考える. 補題 1.1.10 より

$$X_\lambda = \sum_{\mu\in\mathrm{Par},\,|\mu|=|\lambda|} a_{\lambda\mu}[I_\mu],\quad a_{\lambda\mu}\in\mathbb{C} \tag{1.6}$$

と書ける. $a_{\lambda\mu}\neq 0$ と仮定し $I_\mu=(V,x)$ と表す. 系 1.2.6 より, V の部分線形空間からなる増大列

$$V^\bullet = (0=V^0\subset V^1\subset\cdots\subset V^n = V)$$

が存在して, $i=1,\dots,n$ について $\dim(V^i/V^{i-1}) = l_i+\cdots+l_n$ かつ $x(V^i)\subset V^{i-1}$ となる. 特に $\operatorname{Ker} x^i\supset V^i$. これから

$$\dim(\operatorname{Ker} x^i)\geq \dim V^i = l_1+2l_2+\cdots+(i-1)i_{i-1}+i(l_i+\cdots+l_n). \tag{1.7}$$

そこで分割 $\nu=(1^{n_1},2^{n_2},\dots)$ と $i\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\sigma_i(\nu) := n_1+2n_2+\cdots+(i-1)n_{i-1}+i(n_i+n_{i+1}+\cdots)$$

と定め, また分割の半順序 $\succeq$ を

$$\alpha\succeq\beta \iff |\alpha|=|\beta| \text{かつ任意の } i\in\mathbb{Z}_{>0} \text{ に対して} \sigma_i(\alpha)\leq\sigma_i(\beta) \tag{1.8}$$

と定義する. ν の転置 ν' を用いて[*2]

$$\sigma_i(\nu) = \nu'_1+\cdots+\nu'_i \tag{1.9}$$

となることから

$$\dim(\operatorname{Ker} x^i) = \sigma_i(\mu) \tag{1.10}$$

[*2] 分割 ν の転置とは, 対応する Young 図形 Y を対角線に沿って転置して得られる Young 図形 Y' を考えて, Y' に対応した分割のことです. ここでは Macdonald [M95, Chap. I, §1] に従って ν の転置を ν' と表しています.

が分かる (問題 1.2). すると (1.7) から, $a_{\lambda\mu} \neq 0$ なら $\lambda \succeq \mu$. 更にもし $\lambda = \mu$ なら, 上の $V^\bullet$ は一意的である. 以上より (1.6) は

$$X_\lambda = [I_\lambda] + \sum_{\mu \prec \lambda} a_{\lambda\mu}[I_\mu], \quad a_{\lambda\mu} \in \mathbb{C} \tag{1.11}$$

と書ける. すると行列 $A = (a_{\lambda\mu})$ は上三角行列であり, 対角成分は 1 である. これより A は逆行列 A^{-1} を持ち, $A^{-1} = (a^{\lambda\mu})$ と書くと

$$[I_\lambda] = \sum_{\mu \preceq \lambda} a^{\lambda\mu} X_\lambda. \tag{1.12}$$

補題 1.1.6 (2) より $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ は $[I_\lambda]$ 達によって張られるから, (1.12) より $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ は X_λ 達でも張られる. X_λ は $[I_{(1^n)}]$ 達の積だったから, 積 $*$ の可換性 (命題 1.2.7) と合わせて $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}, *) \simeq \mathbb{C}[[I_{(1)}], [I_{(1^2)}], \ldots]$ を得る. □

注意 1.2.9. この証明に関して二つコメントします.

(1) 式 (1.9) から, (1.8) の半順序 $\succeq$ は転置の**支配的半順序** $\leq$ と同値です. つまり

$$\alpha \succeq \beta \iff \alpha' \leq \beta' \ :\Longleftrightarrow\ |\alpha'| = |\beta'| \text{ かつ任意の } i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ に関して} \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_i \leq \beta'_1 + \cdots + \beta'_i.$$

(2) 注意 1.2.5 の $\mathbf{H}_{\mathrm{cl},\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Par}} \mathbb{Z}[I_\lambda]$ についても同様の議論が成立して, その結果, 環同型

$$(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}, *) \simeq \mathbb{Z}\big[[I_{(1)}], [I_{(1^2)}], \ldots\big]$$

が得られます. 実際, 展開 (1.6) や (1.11) で $a_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$ なので, $A = (a_{\lambda\mu})$ は対角成分が 1 の整数係数上三角行列になり, 逆行列 A^{-1} もまた対角成分が 1 の整数係数上三角行列です. よって (1.12) で $a^{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$ となります.

定理 1.2.8 によって $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}, *)$ の環構造が一通り分かったことになりますが, もっと細かい話も議論できます. 例えば基底 $\{[I_\lambda] \mid \lambda \in \mathrm{Par}\}$ に関する積の構造定数, つまり

$$g^\nu_{\lambda,\mu} := \big|G^\nu_{\lambda,\mu}(\mathbb{F}_q)\big|$$

を任意の $\lambda, \mu, \nu \in \mathrm{Par}$ に対して具体的に求める, といった問題があります. 補題 1.1.9 から特別な場合の答えが直ぐに得られます.

補題 1.2.10. $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ とすると

$$g^{(1^n)}_{(1^{n-m}),(1^m)} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}'_q, \quad g^{(n)}_{(n-m),(m)} = 1.$$

但し $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]'_q$ は q 二項係数. つまり

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}'_q := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m (q;q)_{n-m}}, \quad (x;q)_n := \prod_{i=1}^n (1 - xq^{i-1}). \tag{1.13}$$

証明. 補題 1.1.9 より後半は明らか. 前半は問題 1.3 から従う. □

もう少し一般の形の $g^\nu_{\lambda,\mu}$ については, 次の主張が知られています.

事実 1.2.11 (列の Pieri 則). 分割 λ, μ および $p \in \mathbb{N}$ について,

$$G^{\nu}_{\lambda,(1^p)} \neq \emptyset \iff \theta := \nu - \mu \text{ が垂直帯かつ } |\theta| = p.$$

但し $\theta := \nu - \mu = (\nu_1 - \mu_1, \nu_2 - \mu_2, \dots)$ が垂直帯 (vertical strip) であるとは, 全ての i について $0 \le \nu_i - \mu_i \le 1$ を満たすことを言う. また, 上記の条件が成立する場合,

$$g^{\mu}_{\lambda,(1^p)} = q^{n(\mu)-n(\lambda)-n(1^p)} \prod_{i \ge 1} \begin{bmatrix} \mu'_i - \mu'_{i+1} \\ \mu'_i - \lambda'_i \end{bmatrix}'_{1/q}.$$

但し $\mu' = (\mu'_1, \mu'_2, \dots)$ や ν' は分割の転置 (定理 1.2.8 の証明の (1.8) 後の脚注を参照) であり, また

$$n(\lambda) := \sum_{i \ge 1} (i-1)\lambda_i. \tag{1.14}$$

証明は [M95, Chap. II, §4 (4.4)] 及び私の東大での集中講義の講義ノート [柳 18, 2 日目, 系 2.3.4] をご覧下さい. 更に一般の $g^{\nu}_{\lambda,\mu}$ については [M95, Chap. II, §4] で扱われています.

例 1.2.12. 後のこともあって, 非自明なもののうち一番簡単な例を計算しておきます. $e_1 := [I_(1)]$ と書いて $e_1 * e_1$ を計算しましょう. 次数付き代数であることから

$$e_1 * e_1 = g^{(2)}_{(1),(1)}[I_{(2)}] + g^{(1^2)}_{(1),(1)}[I_{(1^2)}]$$

となります. 補題 1.2.10 から

$$g^{(2)}_{(1),(1)} = 1, \quad g^{(1^2)}_{(1),(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}'_q = \frac{(1-q^2)(1-q)}{(1-q)^2} = 1 + q.$$

よって

$$e_1 * e_1 = [I_{(2)}] + (1+q)[I_{(1^2)}].$$

なお, 事実 1.2.11 を使っても $g^{(2)}_{(1),(1)} = q^{0-0-0}\left[\begin{smallmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{smallmatrix}\right]'_{1/q}\left[\begin{smallmatrix} 1-0 \\ 0-0 \end{smallmatrix}\right]'_{1/q} = 1$, $g^{(1^2)}_{(1),(1)} = q^{1-0-0}\left[\begin{smallmatrix} 2-0 \\ 2-1 \end{smallmatrix}\right]'_{1/q} = q(1+q^{-1}) = 1+q$ となります.

1.3　余積構造

これまでは $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ の環構造 $*$ だけを考えていましたが, それは **Hopf 代数**の構造の一部であることが知られています. この副節では余代数構造を説明します.

定義 1.3.1. 体 k 上の線形空間 C と線形写像 $\Delta \colon C \to C \otimes_k C$ があって次の図式が可換であるとき, 組 (C, Δ) を (余結合) k **余代数** (k-coalgebra) と呼び, Δ を**余積** (comultiplication) と呼ぶ,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes_k C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] \\ C \otimes_k C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & C \otimes_k C \otimes_k C \end{tikzcd}$$

更に k 線形写像 $\epsilon\colon C \to k$ があって次の図式が可換であるとき, 組 (C, Δ, ϵ) を**余単位的 k 余代数**, i を**余単位射** (counit) と呼ぶ.

$$
\begin{tikzcd}
 & C & \\
C \otimes_k k \arrow[ur, "\simeq"] & & k \otimes_k C \arrow[ul, "\simeq"'] \\
 & C \otimes_k C \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"] \arrow[ur, "\epsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[from=1-2, "\Delta"] &
\end{tikzcd}
$$

k 余代数の射, 及び余単位的 k 余代数の射が自然に定義できる (詳細略).

前副節と同様に, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の Jordan 箙の冪零表現圏 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}}$ 及び $\mathbb{C}$ 線形空間 $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Par}} \mathbb{C}[I_\lambda]$ を考えます. また, 圏 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}}$ の対象 M に対し, $\mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}}}(M)$ で M の自己同型群を表します. 有限体上で考えているので $\mathrm{Aut}(M)$ は有限群です. 分割 λ, μ, ν に対して $g^{\nu}_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}$ 及び $a_\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$ を以下の式で定めます.

$$g^{\nu}_{\lambda,\mu} \coloneqq \bigl|G^{\nu}_{\lambda,\mu}\bigr|, \quad a_\lambda \coloneqq \bigl|\mathrm{Aut}(I_\mu)\bigr|.$$

定理 1.3.2. $\mathbb{C}$ 線形写像 $\Delta\colon \mathbf{H}_{\mathrm{cl}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{H}_{\mathrm{cl}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ を, 基底に対しては

$$\Delta([I_\nu]) \coloneqq \sum_{\lambda,\mu\in\mathrm{Par}} \frac{a_\lambda a_\mu}{a_\nu} g^{\nu}_{\lambda,\mu} [I_\lambda] \otimes [I_\mu] \tag{1.15}$$

で定め, 一般の元に対しては $\mathbb{C}$ 線形に拡張して定めることができる. そして $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}, \Delta)$ は $\mathbb{C}$ 上の余代数である. 更に $\mathbb{C}$ 線形写像 $\epsilon\colon \mathbf{H}_{\mathrm{cl}} \to \mathbb{C}$ を $\epsilon([I_\mu]) \coloneqq \delta_{\mu,\emptyset}$ で定義すると, これは $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}, \Delta, \epsilon)$ は $\mathbb{N}$ 次数付き $\mathbb{C}$ 余代数である.

証明. 余積が well-defined であることを示す. $\frac{a_\lambda a_\mu}{a_\nu} g^{\nu}_{\lambda,\mu}$ が有限であることは既に分かっているので, $\sum_{\lambda,\mu}$ が有限和になることを示せばよい. つまり与えられた $\nu \in \mathrm{Par}$ に対して, $g^{\nu}_{\lambda,\mu} \neq 0$ であるような $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Par}^2$ が有限組しか存在しないことを示せばよいが, 補題 1.1.10 より $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$ なので, 確かに有限個である.

余結合律は次節で一般の Ringel-Hall 代数について示す (命題 2.3.2). 古典的 Hall 代数が Ringel-Hall 代数の特別な場合である (命題 2.1.7).

余単位律については省略する. $\mathbb{N}$ 次数構造は定理 1.2.2 と同じ $\deg([I_\lambda]) \coloneqq |\lambda|$ で, 余積がこれを保つことは補題 1.1.10 の $g^{\nu}_{\lambda,\mu} \neq 0 \implies |\lambda| + |\mu| = |\nu|$ から従う. □

注意 1.3.3. 環構造に関しては注意 1.2.5 で述べたように $\mathbb{Z}$ 係数でも議論できますが, 余積の定義式 (1.15) から分かるように余代数構造は $\mathbb{Q}$ 上で議論する必要があります,

積 $*$ の可換性 (命題 1.2.7) と同様に, 次の主張も $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}}$ の特殊事情です.

命題 1.3.4. $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}, \Delta)$ は**余可換** (cocommutative) な $\mathbb{C}$ 余代数. つまり線形写像 $\Delta^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{H}_{\mathrm{cl}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{cl}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ を, $\Delta(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$ の時に $\Delta^{\mathrm{op}}(x) \coloneqq \sum_i x_i^{(2)} \otimes x_i^{(1)}$ で定義すると, 任意の $x \in \mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ に対して $\Delta(x) = \Delta^{\mathrm{op}}(x)$.

証明. $\frac{a_\lambda a_\mu}{a_\nu} g^{\nu}_{\lambda,\mu} = \frac{a_\mu a_\lambda}{a_\nu} g^{\nu}_{\nu,\lambda}$, つまり $g^{\nu}_{\lambda,\nu} = g^{\nu}_{\nu,\lambda}$ を示せばよいが, それは積の可換性 (命題 1.2.7) で既に示している. □

次に余積の計算例 (命題 1.3.6) を挙げたいのですが, 定義より $a_\lambda = \bigl|\mathrm{Aut}_{\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}}}(I_\lambda)\bigr|$ を計算しておく必要があるので, それを先に説明します.

命題 1.3.5 ([S06, Lemma 2.8])**.** 分割 λ に対して $m_i := m_i(\lambda) = \{j \mid \lambda_j = i\}$ とすると，任意の基礎体 F の場合で

$$\mathrm{Aut}_{\mathsf{Rep}_F^{\mathrm{nil}} Q_{\mathrm{Jor}}}(I_\lambda) \simeq \prod_{i\geq 1} \mathrm{GL}(m_i) \times \big(\mathbb{A}_F^{m_i} \times \mathbb{A}_F^{\sum_{j<i} jm_j + (i-1)m_i + i\sum_{j>i} m_j}\big).$$

但し $\mathbb{A}_F^n$ は n 次元線形空間 F^n を加法に関する群とみなしたもの．従って $F = \mathbb{F}_q$ なら，(1.14) の $n(\lambda) := \sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$ 及び (1.13) の $(x;q)_n := \prod_{i=1}^n (1-xq^{i-1})$ を用いて

$$a_\lambda = q^{|\lambda|+2n(\lambda)} \prod_{i\geq 1} (q^{-1};q^{-1})_{m_i(\lambda)}. \tag{1.16}$$

特に $\mathrm{Aut}(I_{(1^n)}) \simeq \mathrm{GL}(n)$ で，更に $F = \mathbb{F}_q$ なら

$$a_{(1^n)} = q^{n^2}(q^{-1};q^{-1})_n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}(q;q)_n. \tag{1.17}$$

証明. $I_\lambda = (F^{|\lambda|}, x)$ と書いておく．$I_\lambda = I_{(1)}^{\oplus m_1} \oplus I_{(2)}^{\oplus m_2} \oplus \cdots$ に注意して，$I_{(i)}^{\oplus m_i}$ の生成元 $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{m_i}$ を取って固定する．線形写像 $f \in \mathrm{End}_F(I_\lambda)$ は x_i^j の行先を指定すれば定まる．それが $\mathrm{Aut}(I_\lambda)$ の元であるためには，$f(x_i^j) \in \mathrm{Ker}\, x^i$ かつ $f(x_i^j)$ の $I_{(i)}^{\oplus m_i}$ での成分が 0 でないことが必要十分．これから $(f(x_i^1), \ldots, f(x_i^{m_i}))$ の行先は

$$\mathrm{GL}(m_i) \times \Big(\mathbb{A}^{m_i} \times \big((\mathrm{Ker}\, x^i \cap \oplus_{j\neq i} I_j^{\oplus m_j}) \oplus (\mathrm{Ker}\, x^i \cap I_i^{\oplus m_j})\big)\Big)$$

だけある．$j < i$ なら $\mathrm{Ker}\, x^i \cap I_j^{\oplus m_j} = I_j^{\oplus m_j}$ となることに注意して結論を得る．

式 (1.16) と (1.17) は問題 1.4 と $|\lambda| = \sum_i im_i$, $n(\lambda) = \sum_i i\binom{m_i}{2} + \sum_{i<j} im_i m_j$ から従う．□

命題 1.3.6. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Delta([I_{(1^n)}]) = \sum_{r=0}^n q^{-r(n-r)}[I_{(1^{n-r})}] \otimes [I_{(1^r)}].$$

特に $e_1 := [I_{(1)}]$ について $\Delta(e_1) = e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_1$.

証明. 余積の定義 (1.15) から

$$\Delta([I_{(1^n)}]) = \sum_{r=0}^n a_{(1^n)}^{-1} a_{(1^{n-r})} a_{(1^r)} g_{(1^{n-r}),(1^r)}^{(1^n)} \cdot [I_{(1^{n-r})}] \otimes [I_{(1^r)}].$$

命題 1.3.5 の $a_{(1^n)} = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}(q;q)_n$ と補題 1.2.10 の $g_{(1^{n-r})(1^r)}^{(1^n)} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q'$ に注意すると

$$a_{(1^n)}^{-1} a_{(1^{n-r})} a_{(1^r)} g_{(1^{n-r}),(1^r)}^{(1^n)} = q^{-\binom{n}{2}} q^{\binom{n-r}{2}} q^{\binom{r}{2}} = q^{-r(n-r)}.$$

□

最後に原始元について触れておきます．余代数において $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ を満たす元 x を**原始元** (primitive element) と呼びます．命題 1.3.6 で $e_1 = [I_{(1)}]$ が古典的 Hall 代数の原始元であることを見ましたが，実は次のように原始元を分類することができます．

事実 1.3.7. $p_0 := 1 = [0] \in \mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ とする．また $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $p_n \in \mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ を次式で定義する．

$$p_n := \sum_{|\lambda|=n} (q;q)_{\ell(\lambda)-1} \cdot [I_\lambda]. \tag{1.18}$$

すると余代数 $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}, \Delta)$ の斉次原始元は p_n の定数倍のみである．特に $\Delta(p_n) = p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n$.

証明は [柳 18, 2 日目, 定理 2.7.2] 及び [SY21, Theorem 3.3.2] をご覧ください.

例 1.3.8. 事実 1.3.7 で $n=1$ とすると, 命題 1.3.6 の $e_1=[I_{(1)}]=p_1$ なので確かに原始元です. また $n=2$ の場合は

$$p_2=[I_{(2)}]+(q;q)_1[I_{(1^2)}]=[I_{(2)}]+(1-q)[I_{(1^2)}].$$

ですが, 命題 1.3.6 から

$$\Delta(I_{(1^2)})=I_{(1^2)}\otimes 1+q^{-1}e_1\otimes e_1+1\otimes I_{(1^2)}.$$

次に

$$\begin{aligned}\Delta([I_{(2)}])&=\frac{a_{(2)}a_{(0)}}{a_{(2)}}g^{(2)}_{(2),(0)}[I_{(2)}]\otimes 1+\frac{a_{(1)}a_{(1)}}{a_{(2)}}g^{(2)}_{(1),(1)}e_1\otimes e_1+\frac{a_{(0)}a_{(2)}}{a_{(2)}}g^{(2)}_{(0),(2)}1\otimes[I_{(2)}]\\&=[I_{(2)}]\otimes 1+\frac{a_{(1)}^2}{a_{(2)}}g^{(2)}_{(1),(1)}e_1\otimes e_1+1\otimes[I_{(2)}]\end{aligned}$$

を計算したいのですが, (1.16) から (もしくは直接計算で)

$$a_{(2)}=\left|\mathrm{Aut}(I_{(2)})\right|=q^2(1-q^{-1})=q(q-1),\quad a_{(1)}=q(1-q^{-1})=q-1$$

です. 例 1.2.12 あるいは補題 1.2.10 より $g^{(2)}_{(1),(1)}=1$ なので

$$\frac{a_{(1)}^2}{a_{(2)}}g^{(2)}_{(1),(1)}=\frac{(q-1)^2}{q(q-1)}=1-q^{-1}.$$

以上より

$$\begin{aligned}\Delta(p_2)&=([I_{(2)}]\otimes 1+(1-q^{-1})e_1\otimes e_1+1\otimes[I_{(2)}])+(1-q)(I_{(1^2)}\otimes 1+q^{-1}e_1\otimes e_1+1\otimes I_{(1^2)})\\&=([I_{(2)}]+(1-q)I_{(1^2)})\otimes 1+1\otimes([I_{(2)}]+(1-q)I_{(1^2)})=p_2\otimes 1+1\otimes p_2.\end{aligned}$$

1.4 双代数構造と Hopf 内積

$\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ の代数構造 (定理 1.2.2) と余代数構造 (定理 1.3.2) は下の定理 1.4.2 の意味で整合的です.

定義 1.4.1. 体 k 上の線形空間 B 及び k 代数 (B,μ) と k 余代数 (B,Δ) が与えられたとする. 次の図式が可換な時, (B,μ,Δ) を k **双代数** (bialgebra) と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd} B\otimes_k B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & B \arrow[r, "\Delta"] & B\otimes_k B \\ B^{\otimes_k 4} \arrow[rr, "\tau_{23}"'] & & B^{\otimes_k 4} \arrow[u, "\mu\otimes\mu"'] \end{tikzcd}$$

但し τ_{23} は 2 番目と 3 番目のテンソル成分の置換, つまり $\tau_{23}(a\otimes b\otimes c\otimes d):=a\otimes c\otimes b\otimes d$.

更に単位射 η と余単位射 ϵ が与えられている場合, 次の三つの図式が可換な時, $(B,\mu,\Delta,\eta,\epsilon)$ を単位的かつ余単位的な k 双代数と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\epsilon"] & k \\ B\otimes_k B \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\epsilon\otimes\epsilon"'] & k\otimes_k k \arrow[u, "\mu_k"'] \end{tikzcd}\qquad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "\Delta"'] & k \arrow[l, "\eta"'] \arrow[d, "\Delta_k"] \\ B\otimes_k B & k\otimes_k k \arrow[l, "\eta\otimes\eta"] \end{tikzcd}\qquad \begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_k"'] & B \arrow[d, "\epsilon"] \\ & k \end{tikzcd}$$

但し $\mu_k\colon k\otimes_k k\to k$ は体 k の積であり, $\Delta_k\colon k\to k\otimes_k k$ は自然な同型.

単位的かつ余単位的な双代数の定義を言い換えると以下のようになります.

- $\Delta\colon B\otimes B\to B$ と $\epsilon\colon B\to k$ は k 代数の射. 但し $B\otimes B$ を, 次の演算 $*$ を積とする k 代数と見なしている.
$$(b_1\otimes b_2)*(b_1'\otimes b_2'):=\mu(b_1\otimes b_1')\otimes\mu(b_2\otimes b_2').$$
- $\eta\colon k\to B$ は k 余代数の射. 但し体 k を (k,μ_k,Δ_k) で余代数と見なしている.
- $\epsilon\circ\eta=\mathrm{id}_k$.

定理 1.4.2. $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}},*,\Delta,\eta,\epsilon)$ は単位的かつ余単位的な $\mathbb{C}$ 双代数である.

この主張の証明は, 次節で一般の Ringel-Hall 代数を扱う時に説明します.
次に Hopf 内積を扱います.

定義 1.4.3. $(B,\mu,\Delta,\eta,\epsilon)$ を体 k 上の双代数とする. B 上の双線形型式 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon B\otimes_k B\to k$ は, 任意の $x,y,z\in B$ に対して条件

$$\langle xy,z\rangle=\langle x\otimes y,\Delta(z)\rangle,\quad \langle[0],x\rangle=\epsilon(x),$$
$$\langle z,xy\rangle=\langle\Delta(z),x\otimes y\rangle,\quad \langle x,[0]\rangle=\epsilon(x)$$

を満たすときに **Hopf ペアリング**と呼ばれる. 但し $\Delta(z)=\sum_i z_i^{(1)}\otimes z_i^{(2)}$ の時に $\langle x\otimes y,\Delta(z)\rangle:=\sum_i\langle x,z_i^{(1)}\rangle\langle y,z_i^{(2)}\rangle$ と定義し, $\langle\Delta(z),x\otimes y\rangle$ も同様に定義する. 更に非退化なときは **Hopf 内積**と呼ばれる.

命題 1.4.4. $M\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q}Q_{\mathrm{Jor}})$ に対し $a_M:=\mathrm{Aut}(M)$ と書く. 次で定まる $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{C}$ 双代数 $(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}},*,\Delta,[0],\epsilon)$ の Hopf 内積である.

$$\langle[M],[N]\rangle:=\frac{\delta_{M,N}}{a_M}\quad(M,N\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q}Q_{\mathrm{Jor}})).$$

但し $\delta_{M,N}$ は $M\simeq N$ なら 1 で, そうでないなら 0. 特に $\lambda,\mu\in\mathrm{Par}$ について

$$\langle[I_\lambda],[I_\mu]\rangle=\frac{\delta_{\lambda,\mu}}{q^{|\lambda|+2n(\lambda)}\prod_{i\geq 1}(q^{-1};q^{-1})_{m_i(\lambda)}}.$$

証明. 前半は次節で一般の Ringel-Hall 代数について示す. 後半は (1.16) から従う. □

以上から次の主張の前半が従います.

定理 1.4.5 (Steinitz, Hall, Macdonald,...)**.** 古典的 Hall 代数 $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ は Hopf 内積付きの可換かつ余可換な $\mathbb{C}$ 双代数であり, 対称函数のなす $\mathbb{C}$ 双代数 $\Lambda=\mathbb{C}[x_1,x_2,\ldots]^{\mathfrak{S}_\infty}$ と次の写像で同型になる.

$$\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}\longrightarrow\Lambda,\quad q^{\binom{n}{2}}[I_{(1^n)}]\longmapsto e_n(x):=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}.$$

$\{e_n(x)\mid n\in\mathbb{N}\}\subset\Lambda$ は環としての生成元で, 基本対称函数と呼ばれる.

後半については Macdonald の本の [M95, Chap. II, III] や私の東大集中講義ノートの [柳 18, 2 日目, 定理 2.5.3] を参照して下さい.
最後に命題 1.4.4 の Hall 内積について次の主張を紹介します.

事実 1.4.6. 事実 1.3.7 の斉次原始元 $p_n \in \mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ について

$$\langle p_m, p_n \rangle = \delta_{m,n} \frac{n}{q^n - 1}.$$

証明は [SY21, Theorem 3.4.1] 及び [柳 18, 2 日目, §§2.7–2.8] をご覧ください．実はこれは, 定理 1.4.5 の同型の下, Λ における Hall 内積 [M95, Chap. III, §4] と一致します．

例 1.4.7. 事実 1.4.6 を簡単な場合に確かめます．$a_\lambda := \mathrm{Aut}(I_\lambda)$ と略記します．$n = 1$ なら $p_1 = [I_{(1)}]$ で, (1.16) もしくは直接計算で $a_{(1)} = q - 1$ だから

$$\langle p_1, p_1 \rangle = \frac{1}{a_{(1)}} = \frac{1}{q-1}.$$

$n = 2$ なら例 1.3.8 で見たように $p_2 = [I_{(2)}] + (1-q)[I_{(1^2)}]$ 及び $a_{(2)} = q^2 - q$．また (1.16) ないし直接計算で $a_{(1^2)} = (q^2-1)(q^2-q)$．従って

$$\begin{aligned}\langle p_2, p_2 \rangle &= \langle [I_{(2)}], [I_{(2)}] \rangle + (1-q)^2 \langle [I_{(1^2)}], [I_{(1^2)}] \rangle = \frac{1}{a_{(2)}} + \frac{(1-q)^2}{a_{(1^2)}} \\ &= \frac{1}{q(q-1)} + \frac{(q-1)^2}{q(q-1)(q^2-1)} = \frac{1}{q(q-1)} + \frac{1}{q(q+1)} = \frac{2}{q^2-1}.\end{aligned}$$

1.5 参考文献とレポート問題

この節の内容は概ね I. G. Macdonald の対称函数の本 [M95, Chap. II] と O. Schiffmann の講義ノート [S06, §2] に従いました．

古典的 Hall 代数は E. Steinitz が 1900 年頃に (本質的には) 導入していて, その後 (恐らく Steinitz の仕事には気付かずに) P. Hall が 1959 年に現代的な定式化を与えました．歴史に興味がある人は, Macdonald の対称函数の本の二章の註釈 [M95, pp.197–198, Chap. II, Notes and References] から文献をたどってみて下さい．

対称函数環 Λ については様々な本で解説されていますが, ここでは Macdonald [M95, Chap. I] だけ挙げておきます．関連して, 定理 1.4.5 の同型 $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}} \simeq \Lambda$ について幾つかコメントをすると

- $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ の基底 $\{[I_\lambda] \mid \lambda \in \mathrm{Par}\}$ に対応した Λ の基底が $\{P_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Par}\}$ ありますが, これはパラメータ q^{-1} の **Hall-Littlewood 対称函数**であることが知られています [M95, Chap. III, §§1–3], [柳 18, 2 日目, 定理 2.6.1].
- 事実 1.3.7 の $p_n \in \mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ は, 定理 1.4.5 の同型の下で冪和対称函数 $p_n(x) = \sum_i x_i^n \in \Lambda$ に対応します [M95, Chap. III, §4], [柳 18, 2 日目, §§2.7–2.8].
- 定理 1.4.5 における対称函数環 Λ の Hopf 代数構造は Zelevinsky が [Z81] で導入したものの q 変形です [柳 18, 2 日目].

対称函数環は初等的かつ古典的な数学的対象で, 組み合わせ論的表現論の源流の一つです．例えば事実 1.2.11 は列の Pieri 則と名付けていますが, これは Schur 対称函数 $s_\lambda \in \Lambda$ の積に関する構造定数 $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu$ のうち, $\lambda = (l)$ または $\lambda = (1^l)$ の場合が Young 図形を用いて簡単に書けて, それらを行および列の Pieri 則と呼ぶことにちなんでいます．事実 1.2.11 は Hall-Littlewood 対称函数 $P_\lambda(q^{-1})$ の積に関する構造定数の公式に他なりません．

§ 1.3 以降は Hopf 代数の定義を段階的に紹介しました．一般論の説明は [CP94, §4.1] や [Jos95, Chap. 1] を見て下さい．

問題 1.1. 命題 1.2.7 の証明の途中で用いた同型 $I_\nu^* \simeq I_\nu$, $M^\perp \simeq I_\lambda$, $I_\nu^*/M^\perp \simeq I_\mu$ を示せ.

Show the isomorphisms $I_\nu^* \simeq I_\nu$, $M^\perp \simeq I_\lambda$ and $I_\nu^*/M^\perp \simeq I_\mu$ in the proof of 命題 1.2.7.

問題 1.2. 式 (1.9) と (1.10) を示せ. / Show the equations (1.9) and (1.10).

問題 1.3. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{F}_q^n)$ について $\left|\mathrm{Gr}(m, \mathbb{F}_q^n)\right| = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}'_q$ であることを示せ.

Show that the number of points of the Grassmann variety $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{F}_q^n)$ over the finite field $\mathbb{F}_q$ is equal to the q-binomial coefficient $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}'_q$.

問題 1.4. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次一般線形群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ について

$$|\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} (q; q)_n = q^{n^2} (q^{-1}; q^{-1})_n \tag{1.19}$$

となることを示せ.

Show the equality (1.19) for the general linear group $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ over the finite field $\mathbb{F}_q$.

1 日目終わり

2 Ringel-Hall 代数 (12/21, 22)

この節では主に Kapranov の論文 [K97, §1] と Schiffmann の講義ノート [S06, §1] に従って, 適当な条件を満たす Abel 圏 A に対して Ringel-Hall 代数 $\mathbf{H}(\mathsf{A})$ を導入します. 大雑把に言うと「A の拡大の数え上げを構造定数とする結合代数」が $\mathbf{H}(\mathsf{A})$ です. 正確な定義を考えるためにはいくつかの条件を満たす Abel 圏を考える必要があります. 最終的な条件の組は仮定 2.4.1 ですが, 定義に用いる順番に各条件を説明していくことにします.

この節から圏論やホモロジー代数に関する初歩的な知識は仮定します. 特に Abel 圏や Ext 群の定義は仮定します. また次の事実を使います (証明は, 例えば [GM03, III.5, Exercise 2] を参照).

事実 2.0.1. Abel 圏 A の対象 L, M の 1 次 Ext 群 $\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(L, M)$ は, 短完全列の同値類の集合

$$\overline{\mathrm{Ex}}_{L,M} := \{0 \to M \to N \to L \to 0 \mid \mathsf{A} \text{ の短完全列 }\}/\sim$$

と同一視できる. 但し同値関係 $(0 \to M \to N \to L \to 0) \sim (0 \to M \to N' \to L \to 0)$ は, 「図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を可換にする $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(N, N')$ が存在する」という条件が生成するものとして定める.

この節では断らない限り, 線形空間や代数, 余代数等は $\mathbb{C}$ 上のものとします.

2.1 代数構造の定義

前節で古典的 Hall 代数を導入したのと同じ流れで, まず Ringel-Hall 代数の下部線形空間を導入します. 本質的に小な圏の定義 1.1.2 を思い出して下さい.

仮定 2.1. A は本質的に小な Abel 圏.

定義 1.1.2 にあるように, $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ の定める $\mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ の元を $[M]$ と書きます.

定義 2.1.1. 有限台を持つ $\mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ 上の $\mathbb{C}$ 値函数全体のなす線形空間を $\mathrm{F}(\mathsf{A})$ と書く. つまり

$$\mathrm{F}(\mathsf{A}) := \{f\colon \mathrm{Iso}(\mathsf{A}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f([M]) \neq 0 \text{ なる } [M] \text{ は有限個 }\}.$$

また $[M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ に対し $1_{[M]} \in \mathrm{F}(\mathsf{A})$ を $[M]$ の特性函数とする. つまり $[N] \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して

$$1_{[M]}([N]) := \begin{cases} 1 & (N \simeq M) \\ 0 & (N \not\simeq M) \end{cases}.$$

記号の濫用だが, 簡単のため $1_M := 1_{[M]}$, $f(N) := f([N])$ 等と書くこともある.

注意 2.1.2. $\mathrm{F}(\mathsf{A})$ に関するコメントです.

(1) $\mathrm{F}(\mathsf{A})$ の定義から $\{1_M \mid [M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})\}$ は $\mathrm{F}(\mathsf{A})$ の基底.

(2) $\mathbb{C}$ 値函数のなす線形空間として $\mathrm{F}(\mathsf{A})$ を定義しましたが, 古典的 Hall 代数に関する注意 1.2.5 と同様に, $\mathbb{Z}$ 値函数のなす加群を考えても §2.1 の議論は通用します.

仮定 2.2. A は**有限的** (finitary)[*3]Abel 圏, つまり次の条件を満たすものとする.

- 任意の $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対し $|\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M,N)| < \infty$ かつ $\left|\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(M,N)\right| < \infty$.

定理 2.1.3 (Ringel [R90b]). 仮定 2.1 と仮定 2.2 のもと, 双線形写像 $\circ\colon \mathrm{F}(\mathsf{A}) \otimes \mathrm{F}(\mathsf{A}) \to \mathrm{F}(\mathsf{A})$ を $f, g \in \mathrm{F}(\mathsf{A})$, $N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して次式で定める.

$$(f \circ g)([N]) \coloneqq \sum_{M \subset N} f([N/M]) g([M]).$$

但し $M \subset N$ は, M が圏 A における N の部分対象であることを表す. この時 $(\mathrm{F}(\mathsf{A}), \circ)$ は結合代数であり, 更に零対象 $0 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ の特性函数 1_0 はその単位元. 得られた単位的結合代数を以下の様に表し, Abel 圏 A の **Ringel-Hall 代数**と呼ぶ.

$$\mathbf{H}(\mathsf{A}) \coloneqq (\mathrm{F}(\mathsf{A}), \circ, 1_0).$$

証明の前に, まず $\circ$ が well-defined であることを確認します. 準備として次の主張を示しておきます.

命題 2.1.4. $L, M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対し

$$G^N_{L,M} \coloneqq \{M' \subset N \mid M' \simeq M,\ N/M' \simeq L\}, \quad g^N_{L,M} \coloneqq \left|G^N_{L,M}\right|$$

と定める. すると $g^N_{L,M}$ は有限で, また特性函数について

$$(1_L \circ 1_M)(N) = g^N_{L,M}.$$

証明. まず $G^N_{L,M}$ が有限集合であることを示す. 短完全列の集合

$$\mathrm{Ex}^N_{L,M} \coloneqq \{0 \to M \to N \to L \to 0 \mid \mathsf{A} \text{ の完全列 }\} \tag{2.1}$$

を考えよう. $\mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathsf{A}}(M)$ で自己同型群を表すと, 集合 $\mathrm{Ex}^N_{L,M}$ には直積群 $\mathrm{Aut}(L) \times \mathrm{Aut}(M)$ が

$$(\sigma, \tau).(0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0) \coloneqq (0 \to M \xrightarrow{f\tau^{-1}} N \xrightarrow{\sigma g} L \to 0) \quad (\sigma \in \mathrm{Aut}(L),\ \tau \in \mathrm{Aut}(M))$$

で左から作用する. この作用は自由で, 商集合は

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{Aut}(L) \times \mathrm{Aut}(M)\big) \backslash \mathrm{Ex}^N_{L,M} &= \{0 \to M' \xrightarrow{i} N \xrightarrow{q} N/M' \to 0 \mid M' \subset N,\ N/M' \simeq L\} \\ &= G^N_{L,M}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

但し $i\colon M' \to N$ は部分対象 $M' \subset N$ に付随する単射で, $q\colon N \to N/M'$ は商に付随する全射. ここで $\mathrm{Ex}^N_{L,M} \subset \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M,N) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(N,L)$ に注意すると, 有限的であるという仮定 2.2 より $\mathrm{Ex}^N_{L,M}$ は有限集合. よって

$$g^N_{L,M} = \frac{\left|\mathrm{Ex}^N_{L,M}\right|}{|\mathrm{Aut}(L)| \cdot |\mathrm{Aut}(M)|} \tag{2.3}$$

が有限だと分かる.

[*3] finitary には標準的な訳語が恐らくないので, この講義ノートに限ったものだと了解して下さい.

後半の主張については, $\circ$ の定義から

$$(1_L \circ 1_M)(N) = \sum_{M' \subset N} 1_L(N/M')1_M(M') = |\{M' \subset N \mid M' \simeq M,\ N/M' \simeq L\}| = g^N_{L,M}.$$

$\square$

補題 2.1.5. $\circ$ は well-defined.

証明. $\{1_M \mid [M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})\}$ が $\mathrm{F}(\mathsf{A})$ の基底であること (注意 2.1.2 (1)) と命題 2.1.4 から, 任意の $L, M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して

$$1_L \circ 1_M = \sum_{[N]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} g^N_{L,M} 1_N \tag{2.4}$$

の右辺が有限和であること, つまり $G^N_{L,M} \neq \emptyset$ である $[N] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ が有限個であることを示せばよい. (2.2) より $\mathrm{Ex}^N_{L,M} \neq \emptyset$ である $[N]$ を考えればよい. 事実 2.0.1 から

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(L, M) = \overline{\mathrm{Ex}}_{L,M} = \Big(\bigcup_{N\in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})} \mathrm{Ex}^N_{L,M}\Big)/\sim\, = \bigsqcup_{[N]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \mathrm{Ex}^N_{L,M}$$

であり, 仮定 2.2 より $\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(A, B)$ は有限集合なので, $\mathrm{Ex}^N_{L,M} \neq \emptyset$ である $[N] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ は有限個しかない. $\square$

それでは $\circ$ の結合性の証明をします.

定理 2.1.3 の証明. $f, g, h \in \mathrm{F}(\mathsf{A})$ に対して

$$(f \circ (g \circ h))(N) = \sum_{M \subset N} f(N/M)\,(g \circ h)(M) = \sum_{L \subset M \subset N} f(N/M)\, g(M/L)\, h(L).$$

同様に

$$((f \circ g) \circ h)(N) = \sum_{L \subset N} (f \circ g)(N/L)\, h(L) = \sum_{L \subset N,\ M' \subset N/L} f((N/L)/M')\, g(M')\, h(L).$$

これらは (第三同型定理の内容である) 全単射

$$\{(L, M) \mid L \subset M \subset N\} \xrightarrow{\sim} \{(L, M') \mid L \subset N,\ M' \subset N/L\}, \quad M \longmapsto M' := M/L$$

によって等しいことがわかる. よって $\circ$ は結合的. 1_0 が単位元であることは簡単に示せるので略す. $\square$

命題 2.1.4 から $\mathbf{H}(\mathsf{A})$ を次のように定義することもできます. こちらの方が A の仮定 2.2 を使うことが明確になるので分かりやすいかもしれません.

系 2.1.6. $\mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ を基底とする線形空間 $\bigoplus_{[M]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \mathbb{C}[M]$ と

$$[L] \circ [M] := \sum_{[N]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} g^N_{L,M}[N],$$

$$g^N_{L,M} := |\{M' \subset N \mid M' \simeq M,\ N/M' \simeq L\}| = \frac{|\{0 \to M \to N \to L \to 0 \mid \mathsf{A}\text{ の完全列 }\}|}{|\mathrm{Aut}(L)| \cdot |\mathrm{Aut}(M)|} \tag{2.5}$$

で結合代数が定義され, それは写像 $[M] \mapsto 1_M$ のもとで $\mathbf{H}(\mathsf{A})$ と代数同型である.

以降, $\mathbf{H}(\mathsf{A}) = (\mathrm{F}(\mathsf{A}), \circ, 1_0)$ と系 2.1.6 の $(\bigoplus_{[M]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \mathbb{C}[M], \circ, [0])$ を断りなしに同一視します.

ここで §1 の古典的 Hall 代数との関係を述べます.

命題 2.1.7. 定理 1.2.2 の古典的 Hall 代数は Jordan 箙の有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の冪零表現圏 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}}$ に関する Ringel-Hall 代数と一致する.

$$(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}, *, [0]) = \mathbf{H}(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F Q_{\mathrm{Jor}}).$$

証明. 古典的 Hall 代数の積 $*$ の, 基底 $\{[I_\lambda] \mid \lambda \in \mathrm{Par}\}$ に関する構造定数は定義 1.1.8 の $G^\nu_{\lambda,\mu}$ から定まっていて, それは命題 2.1.4 の記号で $G^{I_\nu}_{I_\lambda,I_\mu}$ と等しい. この事と系 2.1.6 から主張が従う. □

一般の Ringel-Hall 代数の話に戻ります. 式 (2.4) と同様にして (又は §1 の系 1.2.6 と同様にして), 次の主張が示せます. 証明は問題 2.1 にします.

補題 2.1.8. $M_1, M_2, \ldots, M_r, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して

$$G^N_{M_1,M_2,\ldots,M_r} := \{A = N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_r \supset N_{r+1} = 0 \mid N_i/N_{i+1} \simeq M_i \ (i = 1, \ldots, r)\}$$

と定めると

$$[M_1] \circ [M_2] \circ \cdots \circ [M_r] := \sum_{[N] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \left|G^N_{M_1,M_2,\ldots,M_r}\right| \cdot [N].$$

古典的 Hall 代数には次数付けがありましたが, 一般の Ringel-Hall 代数も次数付けを持ちます.

定義 2.1.9. 本質的に小な Abel 圏 A の **Grothendieck 群** $K_0(\mathsf{A})$ とは, $\mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ を生成元の集合とし, 短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ に対して関係式 $\overline{L} - \overline{M} + \overline{N} = 0$ を与えることで定義される加群である. ここで $[M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ に対応する $K_0(\mathsf{A})$ の元を $\overline{M}$ と書いた. また $\{\overline{M} \mid [M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})\}$ が生成する部分モノイドを $K_0(\mathsf{A})_{\geq 0}$ と書く.

補題 2.1.10. $\mathbf{H}(\mathsf{A})$ は $K_0(\mathsf{A})_{\geq 0}$ 次数付き結合代数である.

証明. (2.5) と Grothendieck 群の定義から従う. □

補題 2.1.10 と古典的 Hall 代数の次数付けが一致することは, 次の主張から従います.

命題 2.1.11. 任意の体 F に対して加群の同型 $K_0(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F Q_{\mathrm{Jor}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, $\overline{I_\lambda} \mapsto |\lambda|$ がある.

証明. $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ とすると, $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F Q_{\mathrm{Jor}}$ の短完全列

$$0 \to I_{(m)} \to I_{(n)} \to I_{(n)}/I_{(m)} \simeq I_{(n-m)} \to 0$$

が存在する. 実際 $I_{(n)} = (F^n, x)$ について, 補題 1.1.9 (2) の証明と同様に $v := e_n \in F^n$ (n 番目の標準基底) を用いると $F^n = Fv + Fx.v + \cdots + Fx^{n-1}.v$ となる. その m 次元部分表現 $Fx^{n-m}.v + \cdots + Fx^{n-1}.v$ は $I_{(n)}$ と同型で, 商 $Fv + \cdots + Fx^{n-m-1}.v$ は $I_{(n-m)}$ と同型であるから, 上の短完全列が得られる. 短完全列を繰り返し用いることで $\overline{I_{(n)}} = n \cdot \overline{I_{(1)}}$ が分かり, そして分割 λ に対して $\overline{I_\lambda} = |\lambda| \cdot \overline{I_{(1)}}$ となることも分かる. あとは補題 1.1.6 の後半 (直既約表現は I_λ の形のものだけ) より結論が得られる. □

2.2 Euler 型式による積のツイスト

次に Ringel が [R93] で導入した, $\circ$ を Euler 型式でツイストしたものを紹介します. 仮定 2.1 に加えて, 圏 A に次の条件を課します.

仮定 2.3. 大域次元が有限かつ任意の $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ と $i \in \mathbb{N}$ に対して $\left|\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(M, N)\right| < \infty$.

注意 2.2.1. $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M,N)=\mathrm{Ext}^0_{\mathsf{A}}(M,N)$ より，仮定 2.3 から仮定 2.2 が導けます．

Grothendieck 群の定義 2.1.9 と同様に，$M\in\mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ が定める $K_0(\mathsf{A})$ の元を $\overline{M}$ と書きます．

補題 2.2.2. $M,N\in\mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して $\langle M,N\rangle_m\in\mathbb{C}$ を

$$\langle M,N\rangle_m := \sqrt{\prod_{i\ge 0}\left|\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(M,N)\right|^{(-1)^i}}$$

で定義すると，$\langle M,N\rangle_m$ は $\overline{M},\overline{N}\in K_0(\mathsf{A})$ のみに依存する．そして，加法的に拡張することで定まる写像

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_m : K_0(\mathsf{A})\otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\mathsf{A})\longrightarrow\mathbb{C},\quad \alpha\otimes\beta\longmapsto\langle\alpha,\beta\rangle_m$$

は乗法的双線形型式である．つまり

$$\langle\alpha_1+\alpha_2,\beta\rangle_m=\langle\alpha_1,\beta\rangle_m\cdot\langle\alpha_2,\beta\rangle_m,\quad \langle\alpha,\beta_1+\beta_2\rangle_m=\langle\alpha,\beta_1\rangle_m\cdot\langle\alpha,\beta_2\rangle_m. \tag{2.6}$$

これを A の**乗法的 Euler 形式** (の平方根) と呼ぶ．

証明は問題 2.2 にします．

定理 2.2.3. $\mathrm{F}(\mathsf{A})$ 上の双線形写像 $*\colon\ \mathrm{F}(\mathsf{A})\otimes\mathrm{F}(\mathsf{A})\to\mathrm{F}(\mathsf{A})$ を，$[N]\in\mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ に対して

$$(f*g)([N]) := \sum_{M\subset N}\langle N/M,M\rangle_m\cdot f(N/M)\,g(M)$$

で定めると，

$$\mathbf{R}(\mathsf{A}) := (\mathrm{F}(\mathsf{A}),*,1_0)$$

は $K_0(\mathsf{A})_{\ge 0}$ 次数付き代数である．

証明. 結合則のみ示す．定理 2.1.3 の証明と同様に計算する．$f,g,h\in\mathrm{F}(\mathsf{A})$ 及び $N\in\mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(N) &= \sum_{M\subset N}\langle N/M,M\rangle_m\cdot f(N/M)\,(g*h)(M)\\ &= \sum_{L\subset M\subset N}\langle N/M,M\rangle_m\langle M/L,L\rangle_m\cdot f(N/M)\,g(M/L)\,h(L). \qquad (2.7)\\ ((f*g)*h)(N) &= \sum_{L\subset N}\langle N/L,L\rangle_m\cdot(f*g)(N/L)\,h(L)\\ &= \sum_{N\subset L,\,M'\subset N/L}\langle N/L,L\rangle_m\langle (N/L)/M',M'\rangle_m\cdot f((N/L)/M')\,g(M')\,h(L). \qquad (2.8)\end{aligned}$$

ここで Euler 型式の乗法性 (2.6) から

$$\langle N/M,M\rangle_m\langle M/L,L\rangle_m=\langle N/M,M/L\rangle_m\langle N/M,L\rangle_m\cdot\langle M/L,L\rangle_m=\langle N/M,M/L\rangle_m\langle N/L,L\rangle_m.$$

定理 2.1.3 の証明で用いた全単射

$$\{(L,M)\mid L\subset M\subset N\}\xrightarrow{\sim}\{(L,M')\mid L\subset N,\ M'\subset N/L\},\quad M\longmapsto M':=M/L$$

のもとで $(N/L)/M'\simeq N/M$ となるから

$$\langle N/M,M/L\rangle_m\langle N/L,L\rangle_m=\langle N/L,L\rangle_m\langle (N/L)/M',M'\rangle_m.$$

従って (2.7) の各項と (2.8) の各項が対応する．以上で $*$ が結合的であることが示せた．$\square$

系 2.1.6 にあたる言いかえをしておくと

系. $\mathbf{R}(\mathsf{A})$ は $\mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ を基底とする線形空間 $\bigoplus_{[M]\in\mathrm{Iso}(\mathsf{A})}\mathbb{C}[M]$ と

$$[L]*[M] \coloneqq \langle L,M\rangle_m\,[L]\circ[M]$$

とで定義される結合代数と同型.

これ以降は $\mathbf{R}(\mathsf{A})=(\mathrm{F}(\mathsf{A}),*,1_0)$ と $(\bigoplus_{[M]\in\mathrm{Iso}(\mathsf{A})}\mathbb{C}[M],*)$ を区別せずに扱います.

古典的 Hall 代数, つまり $\mathsf{A}=\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q}Q_{\mathrm{Jor}}$ の場合については次の主張が成立します.

命題 2.2.4. $\mathbf{R}(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q}Q_{\mathrm{Jor}})$ は古典的 Hall 代数と等しい. つまり $\mathbf{R}(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q}Q_{\mathrm{Jor}})=\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$.

証明. 乗法的 Euler 形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_m$ が自明であることを示せば十分. 次の補題 2.2.5 より $\langle I_{(1)},I_{(1)}\rangle_m=\sqrt{|\mathbb{F}_q|\,/\,|\mathbb{F}_q|}=1$. よって命題 2.1.11 から任意の $\alpha,\beta\in K_0(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q}Q_{\mathrm{Jor}})$ に対して $\langle\alpha,\beta\rangle_m=1$. □

補題 2.2.5. F を体とする. $\mathsf{A}\coloneqq\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_F Q_{\mathrm{Jor}}$ の唯一の単純対象 $I_{(1)}$ (補題 1.1.6 参照) について

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(I_{(1)},I_{(1)})=F,\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(I_{(1)},I_{(1)})=F,\quad \mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(I_{(1)},I_{(1)})=0\ (i\geq 2).$$

証明. 前半は $I_{(1)}$ が単純であることから直ちに従う. 後半について, 事実 2.0.1 の下で $\xi\in\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(I_{(1)},I_{(1)})$ に対応する短完全列を

$$0\longrightarrow I_{(1)}\longrightarrow (V,x)\longrightarrow I_{(1)}\longrightarrow 0$$

とする. 命題 2.1.11 の同型 $K_0(\mathsf{A})\simeq\mathbb{Z}$ の下で $\overline{(V,x)}=2\cdot\overline{I_{(1)}}=2$. そこで同一視 $V=F^2$ のもとで x を行列

$$\begin{bmatrix}0&a\\0&0\end{bmatrix}$$

とみなすと, $a=0$ なら $(V,x)\simeq I_{(1^2)}=I_{(1)}^{\oplus 2}$, $a\neq 0$ なら $(V,x)\simeq I_{(2)}$ となる. これから $\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(I_{(1)},I_{(1)})\simeq\{a\mid a\in F\}=F$ が分かる. $\mathsf{A}\subset\mathsf{Rep}_F Q_{\mathrm{Jor}}\simeq\mathsf{mod}\,F[t]$ の大域次元は 1 なので, 高次の Ext 群は消える. □

後で余積の余結合律を示すときの為に, 結合律の言いかえをしておきます.

系 2.2.6. $e^N_{L,M}\coloneqq\left|\mathrm{Ex}^N_{L,M}\right|$, $a_L\coloneqq|\mathrm{Aut}(L)|$ と略記すると, 任意の $K,L,M,N\in\mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して

$$\sum_{[J]\in\mathrm{Iso}(\mathsf{A})}\langle L,M\rangle_m\langle J,N\rangle_m e^J_{L,M}e^K_{J,N}/a_J=\sum_{[J]\in\mathrm{Iso}(\mathsf{A})}\langle L,J\rangle_m\langle M,N\rangle_m e^K_{L,J}e^J_{M,N}/a_J.$$

証明. $*$ の結合律と

$$([L]*[M])*[N]=\sum_{[J],[K]}\langle L,M\rangle_m\langle J,N\rangle_m\,g^J_{L,M}g^K_{J,N}[K],$$
$$[L]*([M]*[N])=\sum_{[J],[K]}\langle L,J\rangle_m\langle M,N\rangle_m\,g^K_{L,J}g^J_{M,N}[K]$$

及び (2.5) の $g^N_{L,M}=e^N_{L,M}/a_La_M$ から従う. □

2.3 Green の余積と Hopf 内積

この副節では Green が [Gr95] で導入した余積を扱います. 余代数の定義 1.3.1 及び (2.1) の記号

$$\mathrm{Ex}_{L,M}^N := \{0 \to M \to N \to L \to 0 \mid \mathsf{A}\text{ の完全列 }\}$$

を思い出しておいて下さい.

仮定 2.1 と仮定 2.3 に加え, 次の条件を圏 A に課します.

仮定 2.4. 任意の対象について, その部分対象は有限個.

注意 2.3.1. 有限体上の箙の表現圏はこの仮定 2.4 を満たします.

命題 2.3.2. 写像 $\Delta\colon \mathsf{F}(\mathsf{A}) \to \mathsf{F}(\mathsf{A}) \otimes \mathsf{F}(\mathsf{A})$ と $\epsilon\colon \mathsf{F}(\mathsf{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$\Delta([N]) := \sum_{[L],[M]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \langle L, M\rangle_m \frac{\left|\mathrm{Ex}_{L,M}^N\right|}{|\mathrm{Aut}(N)|}[L]\otimes[M], \quad \epsilon([N]) := \delta_{N,0} \tag{2.9}$$

で定義すると, $(\mathrm{F}(\mathsf{A}), \Delta, \epsilon)$ は余代数.

仮定 2.4 から $\Delta([N])$ は有限和になり well-defined であることに注意します.

証明. 余結合律のみ示す. $e_{L,M}^N := \left|\mathrm{Ex}_{L,M}^N\right|$, $a_N := |\mathrm{Aut}(N)|$ と略記すると

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta([N]) &= (\Delta\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{[J],[K]} \langle J,K\rangle_m e_{J,K}^N/a_N\cdot[J]\otimes[K]\Big)\\ &= \sum_{[J],[K]} \langle J,K\rangle_m e_{J,K}^N/a_N\cdot \sum_{[L],[M]} \langle L,M\rangle_m e_{L,M}^J/a_J\cdot[L]\otimes[M]\otimes[K].\end{aligned} \tag{2.10}$$

同様に

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta([N]) = \sum_{[L],[J]} \langle L,J\rangle_m e_{L,J}^N/a_N\cdot \sum_{[M],[K]} \langle M,K\rangle_m e_{M,K}^J/a_J\cdot[L]\otimes[M]\otimes[K].$$

従って, $[K],[L],[M],[N] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ を固定して, 次の等式を満たせばよい.

$$\sum_{[J]}\langle J,K\rangle_m\langle L,M\rangle_m e_{J,K}^N e_{L,M}^J/a_N a_J = \sum_{[J]}\langle L,J\rangle_m\langle M,K\rangle_m e_{L,J}^N e_{M,K}^J/a_N a_J.$$

これは $*$ の結合律を言い換えた系 2.2.6 から従う. □

仮定 2.4 がない場合でも, $\mathsf{F}(\mathsf{A})\otimes\mathsf{F}(\mathsf{A})$ を完備化すれば Δ に意味がつきます.

命題 2.3.3. 圏 A が仮定 2.1 と仮定 2.3 だけを満たす場合, Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{A})$ を用いて

$$\mathsf{F}(\mathsf{A})[\alpha]\,\widehat{\otimes}\,\mathsf{F}(\mathsf{A})[\beta] := \prod_{\overline{A}=\alpha,\,\overline{B}=\beta} \mathbb{C}[A]\otimes\mathbb{C}[B], \quad \mathsf{F}(\mathsf{A})\,\widehat{\otimes}\,\mathsf{F}(\mathsf{A}) := \prod_{\alpha,\beta\in K_0(\mathsf{A})} \mathsf{F}(\mathsf{A})[\alpha]\,\widehat{\otimes}\,\mathsf{F}(\mathsf{A})[\beta]$$

と定める. そして $\Delta\colon \mathsf{F}(\mathsf{A}) \to \mathsf{F}(\mathsf{A})\,\widehat{\otimes}\,\mathsf{F}(\mathsf{A})\,\widehat{\otimes}\,\mathsf{F}(\mathsf{A})$ と $\epsilon\colon \mathsf{F}(\mathsf{A}) \to \mathbb{C}$ を (2.9) と同じ式で定めると, 余代数の定義 (命題 2.3.2) で $\otimes$ を $\widehat{\otimes}$ にしたものが成立する.

今後はこの意味で「$(\mathsf{F}(\mathsf{A}), \Delta, \epsilon)$ は余積が位相的な余代数である」と言います．

証明．任意の $[N] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ に対して $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta([N])$ 及び $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta([N])$ が $\mathsf{F}(\mathsf{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathsf{F}(\mathsf{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathsf{F}(\mathsf{A})$ に属することを示せば，これらが等しいことは命題 2.3.2 から従う．$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta([N])$ については，計算 (2.10) から

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta([N]) = \sum_{[K],[L],[M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} c_{K,L,M} [K] \otimes [L] \otimes [M],$$
$$c_{K,L,M} := \sum_{[J] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \langle J, M \rangle_m \langle K, L \rangle_m e^N_{J,M} e^J_{K,L} / a_N a_J$$

となるので，$c_{K,L,M}$ が有限和であることを示せばよい．$e^J_{K,L} \neq 0$ なら J が L の K による拡大だが，(仮定 2.3 から出る仮定 2.2 より) A は有限的だからそのような $[J]$ は有限個しかない．よって有限和．$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta([N])$ についても同様である． □

Abel 圏 A に更に条件を課すと，Ringel の積と Green の余積は整合的で，双代数が定まります．双代数の定義 1.4.1 を思い出しておいて下さい．

定義 2.3.4. 仮定 2.1 と仮定 2.3 をみたす Abel 圏 A に対して $(\cdot,\cdot)_m : K_0(\mathsf{A}) \times K_0(\mathsf{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$(\alpha, \beta)_m := \langle \alpha, \beta \rangle_m \langle \beta, \alpha \rangle_m$$

で定義し，**乗法的対称 Euler 形式**と呼ぶ．

次の条件を考えます．

仮定 2.5. Abel 圏 A は**遺伝的** (hereditary)，つまり大域次元が 1 以下．

特に任意の $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対し，$i \geq 2$ なら $\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(M,N) = 0$ です．

定理 2.3.5 (Green [Gr95])**.** 圏 A は仮定 2.1, 2.3, 2.4 及び 2.5 を満たすものとする．$\mathsf{F}(\mathsf{A}) \otimes \mathsf{F}(\mathsf{A})$ 上の積 $*$ を

$$([M_1] \otimes [M_2]) * ([N_1] \otimes [N_2]) := (M_2, N_1)_m \cdot ([M_1] * [N_1]) \otimes ([M_2] * [N_2]) \tag{2.11}$$

で定義する．この時 $\Delta\colon (\mathsf{F}(\mathsf{A}), *) \to (\mathsf{F}(\mathsf{A}) \otimes \mathsf{F}(\mathsf{A}), *)$ は代数準同型.

Green が [Gr95, §2] で与えた証明と，見通しを良くした Ringel の証明 [R96] があります．後者の証明の概略だけ説明します．詳細は Ringel の論文と Schiffmann の [S06, §1.5] にある部分的解説をご覧下さい．

略証．任意の $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して $\Delta([M] * [N]) = \Delta([M]) * \Delta([N])$ を示せばよい．$a_M := |\mathrm{Aut}(M)|$, $e^N_{L,M} := \left|\mathrm{Ex}^N_{L,M}\right|$ 等と略記すると，積と余積の定義を使って直接計算することで，左辺は

$$\Delta([M] * [N]) = \frac{\langle M, N \rangle_m}{a_M a_N} \sum_{[K],[L] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \langle K, L \rangle_m C^{K,L}_{M,N} [K] \otimes [L], \quad C^{K,L}_{M,N} := \sum_{[J] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \frac{1}{a_J} e^J_{M,N} e^J_{K,L}$$

と書けて，また右辺は

$$\Delta([M]) * \Delta([N]) = \frac{\langle M, N \rangle_m}{a_M a_N} \sum_{[K],[L] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \langle K, L \rangle_m S^{K,L}_{M,N} [K] \otimes [L],$$
$$S^{K,L}_{M,N} := \sum_{[K_1],[K_2],[L_1],[L_2]} \frac{\left|\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(K_2, L_1)\right|}{|\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(K_2, L_1)|} \frac{e^K_{K_2,K_1} e^L_{L_2,L_1} e^M_{K_2,L_2} e^N_{K_1,L_1}}{a_{K_1} a_{K_2} a_{L_1} a_{L_2}}$$

と書ける．よって任意の $K, L, M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して $C_{M,N}^{K,L} = S_{M,N}^{K,L}$ を示せばよい．$C_{M,N}^{K,L}$ は以下の十字型の図式を適当な重みづけで数え上げたものと見なせる．

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & L \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & K \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

一方 $S_{M,N}^{K,L}$ は以下の正方形型の図式に関する数え上げと見なせる．

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"'] & L \arrow[r] & L_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & N \arrow[d] & & M \arrow[d, "y"] & \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r, "y'"] & K_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

この後の大まかな流れは，正方形型の図式から出発して，以下の操作で十字型の図式を作り，対応する重みづけを見ると $C_{M,N}^{K,L} = S_{M,N}^{K,L}$ が示せる，というものである．まず $u\colon L_1 \to N$ と $u'\colon L_1 \to N$ の押し出し (pushout) が $Y = L \coprod_{L_1} N \coloneqq L \oplus L_1/\{(u(l), -u'(l)) \mid l \in L_1\}$ で定まる．また $y\colon M \to K_2$ と $y'\colon K \to K_2$ の引き戻し (pullback) が $X = M \prod^{K_2} K \coloneqq \{(m,k) \in M \times K_2 \mid y(m) = y'(k)\}$ で定まる．すると，A が遺伝的であることを使って，$f\colon Y \to X$ でしかるべき条件を満たすものが一意に定まる [R96, p.12, Lemma]．

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dd, "u'"'] & & L \arrow[rr] \arrow[dl] & & L_2 \arrow[dd] \\
 & Y \arrow[dr, hook] \arrow[drr, bend left, "f"] & & & \\
N \arrow[ur] \arrow[dd] & & J \arrow[dr, two heads] & & M \arrow[dd, "y"] \\
 & & & X \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
K_1 \arrow[rr] & & K \arrow[rr, "y'"] & & K_2
\end{tikzcd}$$

更に f は単射と全射の合成 $Y \hookrightarrow J \twoheadrightarrow X$ に一意に分解し [R96, p.15, Proposition]，この J が中央に来るような十字型の図式が一意に定まる．この対応で重みづけを見ると $C_{M,N}^{K,L} = S_{M,N}^{K,L}$ が従う． □

仮定 2.4 を課さない場合, つまり Green の余積が位相的な場合も同様の結果が成立します. 但し $\mathrm{F}(\mathsf{A})\widehat{\otimes}\mathrm{F}(\mathsf{A})$ の積について少し注意が必要です.

定義 2.3.6. $\mathrm{F}(\mathsf{A}) \widehat{\otimes} \mathrm{F}(\mathsf{A})$ の 2 元 $x = \sum_i a_i \otimes b_i$, $y = \sum_j c_j \otimes d_j$ を考える. (2.11) の積 $x * y$ が収束するとは, 任意の $[M], [N] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ に対して次が成り立つことをいう.

$$|\{(i, j) \mid (a_i \otimes b_i) * (c_j \otimes d_j) \text{ における } [M] \otimes [N] \text{ の係数が } 0 \text{ でない }\}| < \infty.$$

補題 2.3.7 ([S06, Lemma 1.8])**.** 任意の $[M], [N] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ に対して $\Delta([M]) * \Delta([N])$ は収束する.

証明はそれほど難しくないが省略します.

命題 2.3.8. 圏 A は仮定 2.1, 仮定 2.3 及び仮定 2.5 を満たすものとする. $\mathrm{F}(\mathsf{A}) \widehat{\otimes} \mathrm{F}(\mathsf{A})$ 上の積 $*$ を (2.11) で定義すると, $\Delta\colon (\mathrm{F}(\mathsf{A}), *) \to (\mathrm{F}(\mathsf{A}) \widehat{\otimes} \mathrm{F}(\mathsf{A}), *)$ は代数準同型. これで得られる, 余積が位相的な双代数

$$\mathbf{R}(\mathsf{A}) = (\mathrm{F}(\mathsf{A}), *, \Delta, \eta, \epsilon)$$

を **Ringel-Hall 双代数**と呼ぶ.

最後に Ringel-Hall 双代数の Hopf 内積を紹介します. 定義 1.4.3 を思い出して下さい.

定理 2.3.9 (Green [Gr95])**.** 仮定 2.1, 2.3 及び 2.5 を満たす圏 A について, $\mathrm{F}(\mathsf{A})$ 上の双線形型式を

$$\langle [M], [N] \rangle := \frac{\delta_{M,N}}{|\mathrm{Aut}(M)|}$$

で定めると, これは余積が位相的な双代数 $\mathbf{R}(\mathsf{A})$ の Hopf 内積.

証明. 非退化性は明らか. 定義の対称性から, 任意の $L, M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して $\langle [L] * [M], [N] \rangle = \langle [L] \otimes [M], \Delta([N]) \rangle$ を示せば十分. $a_L := |\mathrm{Aut}(L)|$, $e^N_{L,M} := \left|\mathrm{Ex}^N_{L,M}\right|$ と書くと

$$\begin{aligned}
\langle [L] * [M], [N] \rangle &= \langle \textstyle\sum_{[J]} \langle L, M \rangle_m g^J_{L,M} [J], [N] \rangle = \langle L, M \rangle_m g^N_{L,M} / a_N = \langle L, M \rangle_m e^N_{L,M} / a_L a_M a_N, \\
\langle [L] \otimes [M], \Delta([N]) \rangle &= \langle [L] \otimes [M], \textstyle\sum_{[J],[K]} \langle J, K \rangle_m e^N_{J,K} / a_N \cdot [J] \otimes [K] \rangle = \langle L, M \rangle_m e^N_{L,M} / a_L a_M a_N.
\end{aligned}$$

□

2.4 拡大 Ringel-Hall 代数とその Hopf 代数構造

今までに挙げてきた圏 A に対する仮定をまとめておきます. 注意 2.2.1 で述べたように, (3) から (2) が出ます. また (5) から (3) の前半が出ます.

仮定 2.4.1. 圏 A に対する以下の条件を考える.

(1) 本質的に小な Abel 圏.
(2) 有限的. つまり任意の $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して $|\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M, N)| < \infty$ かつ $\left|\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(M, N)\right| < \infty$.
(3) 大域次元が有限かつ, 任意の $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ と $i \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(M, N)$ は有限集合.
(4) 任意の対象の部分対象は有限個.
(5) 遺伝的.

この副節では Ringel-Hall 代数を Grothendieck 群の群環で拡大したものを考えます.

仮定 2.4.1 (1) を満たす 1 圏 A に対して, Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{A})$ の群環 $\mathbb{C}[K_0(\mathsf{A})]$ を考えます. $\alpha \in K_0(\mathsf{A})$ に対応する $\mathbb{C}[K_0(\mathsf{A})]$ の元を k_α と書くと, $\mathbb{C}[K_0(\mathsf{A})]$ の積は $k_\alpha k_\beta = k_{\alpha+\beta}$ と書けて, 単位元は k_0 です. そして定義 2.1.1 の $\mathrm{F}(\mathsf{A})$ を拡大した, 次の線形空間 $\widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A})$ を導入します.

$$\widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}) \coloneqq \mathrm{F}(\mathsf{A}) \otimes \mathbb{C}[K_0(\mathsf{A})]$$

次の主張の証明は問題 2.3 にします.

命題 2.4.2. 仮定 2.4.1 (1) と (3) を満たす Abel 圏 A に対して, $\widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A})$ 上の積 $*$ を

$$([M] \otimes k_\alpha) * ([N] \otimes k_\beta) \coloneqq \big(\alpha, \overline{N}\big)_m \cdot ([M] * [N]) \otimes (k_\alpha k_\beta)$$

で定義する. 但し $(\cdot,\cdot)_m$ は定義 2.3.4 の乗法的対称 Euler 形式. この時 $\widetilde{\mathbf{R}}(A) = (\widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}), *, [0] \otimes k_0)$ は $K_0(\mathsf{A})$ 次数付き代数. 但し $\mathbb{C}[K_0(\mathsf{A})]$ 部分の次数は 0 と定める. この $\widetilde{\mathbf{R}}(A)$ を**拡大 Ringel-Hall 代数**と呼ぶ

簡単のためテンソル積の記号を省略して

$$[M]k_\alpha = [M] \otimes k_\alpha, \quad [M] = [M] \otimes 1 = [M] \otimes k_0, \quad k_\alpha = 1 \otimes k_\alpha = [0] \otimes k_\alpha$$

と書きます. すると命題 2.4.2 の積 $*$ は次のように書けます.

$$k_\alpha [M] k_\alpha^{-1} = \big(\alpha, \overline{M}\big)_m [M].$$

次の主張の証明も問題 2.4 にします.

命題 2.4.3. 仮定 2.4.1 (1) と (3) を満たす Abel 圏 A に対して, 余積 $\Delta\colon \widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}) \to \widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}) \widehat{\otimes} \widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A})$ と余単位射 $\epsilon\colon \widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$\Delta([N]k_\gamma) \coloneqq \sum_{[L],[M]} \langle L, M\rangle_m \frac{\left|\mathrm{Ex}^N_{L,M}\right|}{|\mathrm{Aut}(N)|} ([L] k_{\overline{M}+\gamma}) \otimes ([M] k_\gamma), \quad \epsilon([M]k_\alpha) \coloneqq \delta_{M,0}$$

で定義すると, $(\widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}), \Delta, \epsilon)$ は余積が位相的な余代数. 更に仮定 2.4.1 (5) を課すと

$$\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) \coloneqq (\widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}), *, \Delta, [0] \otimes k_0, \epsilon)$$

は余積が位相的な双代数. 更に仮定 2.4.1 (4) を課すと $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A})$ は双代数. また $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) \otimes \widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$\langle [M]k_\alpha, [N]k_\beta \rangle \coloneqq \frac{\delta_{M,N}}{a_M} (\alpha, \beta)_m$$

で定義すると, これは双代数 $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A})$ の Hopf 内積.

この $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A})$ を**拡大 Ringel-Hall 双代数**と呼ぶ.

最後に Hopf 代数の構造を見ます.

定義 2.4.4. $(H, \mu, \Delta, \eta, \epsilon)$ を単位的かつ余単位的な k 双代数とする. k 線形写像 $S\colon H \to H$ が次の図式を可

換にするとき, $(H, \mu, \Delta, \eta, \epsilon, S)$ を k 上の **Hopf 代数**と呼び, S を**対蹠射** (antipode) と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd}
& H\otimes H \arrow[rr, "S\otimes\mathrm{id}"] & & H\otimes H \arrow[dr, "\mu"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[rr, "\epsilon"] & & k \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
& H\otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes S"] & & H\otimes H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

事実 2.4.5 (Xiao [X97])**.** 仮定 2.4.1 (1)–(5) を満たす圏 A に対して, $S\colon \widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}) \to \widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A})$ を

$$S([M]) := |\mathrm{Aut}(M)|^{-1}\, k_M^{-1} \sum_{r\geq 1}(-1)^r \sum_{M_\bullet\in\mathrm{Fil}(M;r)} \Bigl(\prod_{i=1}^{r}\langle M_i/M_{i+1}, M_{i+1}\rangle_m\, |\mathrm{Aut}(M_i/M_{i+1})|\Bigr) \cdot [M_1/M_2] * [M_2/M_3] * \cdots * [M_r].$$

で定義する. 但し $\mathrm{Fil}(M;r)$ は真の部分対象のなす長さ r の減少列の集合, つまり

$$\mathrm{Fil}(M;r) := \{M_\bullet = (M = M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r \supsetneq 0)\}.$$

この時 $(\widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}), *, \Delta, \eta, \epsilon, S)$ は Hopf 代数.

証明は直接計算でできますが, ここでは省略します. [X97, 4.5 Theorem (c)] もしくは [S06, Theorem 1.14] を参照して下さい.

2.5 量子群の Borel 部分代数との関係

箙の表現圏に関する Ringel-Hall 代数が量子群と関係することを説明します. まず, 箙の表現とルート系の関係に関する基本定理である, Gabriel の定理を思い出します. Jordan 箙の表現は §1 で登場しましたが, ここで改めて一般の箙の表現に関する基本事項をまとめておきます.

定義 2.5.1. 有向グラフのことを箙と呼ぶ. 箙 Q の頂点集合を I, 辺集合を H と書き, 辺 $h \in H$ に対して始点を $s(h)$, 終点を $t(h)$ と書く. 箙 Q の体 F 上の表現とは, I で次数付けられた有限次元 F 線形空間 $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ と F 線形写像の族 $x = (x_h)_{h\in H} \in \bigoplus_{h\in H}\mathrm{Hom}_F(V_{s(h)}, V_{t(h)})$ の対 $M = (V, x)$ のことである. Q の F 上の表現のなす圏を $\mathsf{Rep}_F\, Q$ と書く.

$\mathsf{Rep}_F\, Q$ は Abel 圏です. また Q に有向サイクル (始点と終点が一致する道) がなければ $\mathsf{Rep}_F\, Q$ は遺伝的です. それでは Gabriel の定理を思い出しましょう. 箙 Q の下部グラフ (向き付けを忘れて得られるグラフ) を $\underline{Q}$ と書きます. また Q の体上の直既約表現 (の同型類) が有限個の時, Q を**有限型**と呼びます.

事実 2.5.2. $\underline{Q}$ が連結な箙 Q について

$$Q \text{ は有限型} \iff \underline{Q} \text{ は Dynkin 図形}.$$

この条件が成立する時, Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{Rep}_F\, Q)$ は $\underline{Q}$ に付随したルート系のルート格子 $\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ と, 写像 $\overline{M} = \overline{(V,x)} \mapsto \sum_{i\in I}(\dim_F V_i)\alpha_i$ で加群として同型. この同型で単純ルート α_i に対応する表現は 1 次元既約表現 $S_i = (\bigoplus_{j\in I}\mathbb{C}\delta_{i,j}, 0)$.

更にこの同型は格子としての同型でもあります．Grothendieck 群上の双線形型式は**加法的対称 Euler 形式**

$$(\overline{M},\overline{N})_a := \chi(M,N)+\chi(N,M), \quad \chi(M,N) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_F \mathrm{Ext}^i_{\mathsf{Rep}_F\, Q}(M,N)$$

で, ルート格子の双線形型式は Killing 形式 (ないし対応する Cartan 行列). この同型で対応するルート系の $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie 環を $\mathfrak{g}_Q$ と書きます．また話が前後しますが, $\mathsf{Rep}_F\, Q$ は F 上線形なので, 乗法的 Euler 形式 (補題 2.2.2, 定義 2.3.4) と加法的 Euler 形式の間には次の関係式が成り立ます.

$$\langle\alpha,\beta\rangle_m = \nu^{\chi(\alpha,\beta)}, \quad (\alpha,\beta)_m = \nu^{(\alpha,\beta)_a}.$$

但し q の平方根を $\nu := \sqrt{q}$ と書きました.

次に量子展開環 (量子群) について簡単に説明します．Γ を (向き付けは指定しない) ループの無い有限グラフとし, $I=\{1,\dots,n\}$ を頂点集合, n_{ij} を二頂点 $i,j\in I$ を結ぶ辺の本数とします.

$$a_{ij} := 2\delta_{i,j} - n_{ij}$$

とすると行列 $A=[a_{i,j}]_{i,j\in I}$ は対称な一般化 Cartan 行列, つまり以下の性質を満たす対称行列です.

- $a_{ii}=2$, $a_{ij}\leq 0$ $(i\neq j)$.
- $a_{ij}=0 \iff a_{ji}=0$.

q を有限体の位数とし, $\nu=q^{1/2}\in\mathbb{C}$ とします．量子展開環 $U_\nu(\mathfrak{g}_\Gamma)$ は生成元

$$E_i,\ F_i,\ K_i,\ K_i^{-1} \quad (i\in I)$$

と以下の関係式で定義される単位的 $\mathbb{C}$ 代数のことです.

$$\begin{aligned}
&K_iK_i^{-1}=1=K_i^{-1}K_i, \quad K_iK_j=K_jK_i,\\
&K_iE_j=\nu^{a_{ij}}E_jK_i, \quad K_iE_j=\nu^{-a_{ij}}F_jK_i, \quad E_iF_j-F_jE_i=\delta_{i,j}\frac{K_i-K_i}{\nu-\nu^{-1}},\\
&\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^k\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ k\end{bmatrix}_\nu E_i^kE_jE_i^{1-a_{ij}-k}=0 \quad (i\neq j),\\
&\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^k\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ k\end{bmatrix}_\nu F_i^kF_jF_i^{1-a_{ij}-k}=0 \quad (i\neq j).
\end{aligned}$$

但し $m,k\in\mathbb{N}$, $k\leq m$ に対して $\begin{bmatrix}m\\ k\end{bmatrix}_\nu$ を次で定義する[*4]

$$\begin{bmatrix}m\\ k\end{bmatrix}_\nu := \frac{[m]!}{[k]!\cdot[m-k]!}, \quad [m]! := [m]\cdot[m-1]\cdots[1], \quad [m] := \frac{\nu^m-\nu^{-m}}{\nu-\nu^{-1}}.$$

更に $U_\nu(\mathfrak{g}_\Gamma)$ は Hopf 代数で, 余積 Δ と余単位射 ϵ 及び対蹠射 S は以下で与えられます.

$$\begin{aligned}
&\Delta(K_i)=K_i\otimes K_i, \quad \Delta(E_i)=E_i\otimes 1+K_i\otimes E_i, \quad \Delta(F_i)=F_i\otimes K_i^{-1}+1\otimes F_i,\\
&\epsilon(K_i)=1, \quad \epsilon(E_i)=\epsilon(F_i)=0.\\
&S(K_i)=K_i^{-1}, \quad S(E_i)=-K_i^{-1}E_i, \quad S(F_i)=-F_iK_i.
\end{aligned}$$

$U_\nu(\mathfrak{g}_\Gamma)$ の部分代数

$$U_\nu(\mathfrak{b}_\Gamma) := \left\langle E_i, K_i^{\pm 1} \mid i\in I\right\rangle_{\mathrm{alg}}$$

[*4] これも q 二項係数と呼ばれますが, (1.13) の $\begin{bmatrix}m\\ k\end{bmatrix}'_q$ とは因子分違っていて $\begin{bmatrix}m\\ k\end{bmatrix}'_q=\nu^{k(m-k)}\begin{bmatrix}m\\ k\end{bmatrix}_\nu$ です

は, 以上の記述から部分 Hopf 代数であることが分かります. これを $U_\nu(\mathfrak{g}_\Gamma)$ の **Borel 部分代数**と呼びます.

それでは Ringel-Hall 代数と量子群との関係を説明しましょう. Q をループの無い箙とし, $\underline{Q}$ をその下部グラフとします. また $\nu = q^{1/2} \in \mathbb{C}$ とします. $U_\nu(\mathfrak{g}_{\underline{Q}})$ を, $\mathfrak{g}$ の量子群でパラメータを ν に特殊化したものとします. そして $U_\nu(\mathfrak{b}_{\underline{Q}}) \subset U_\nu(\mathfrak{g}_{\underline{Q}})$ を Borel 部分代数とします.

定理 2.5.3 (Ringel [R90a]). Q をループの無い箙とし, $\nu = q^{1/2} \in \mathbb{C}$ とする. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の冪零表現圏 $\mathsf{A} := \mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q$ は仮定 2.4.1 の (1)–(5) を満たし, A の拡大 Ringel-Hall 代数 $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A})$ が定まる:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) = (\widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}), *, k_0 \otimes [0]), \quad \widetilde{\mathrm{F}}(\mathsf{A}) := \mathbb{C}[K_0(\mathsf{A})] \otimes \textstyle\bigoplus_{[M]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \mathbb{C}[M], \\
&[L] * [M] := \nu^{\chi(L,M)} \sum_{[N]\in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \frac{|\mathrm{Ex}^N_{L,M}|}{|\mathrm{Aut}(L)|\,|\mathrm{Aut}(M)|}[N], \\
&k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta}, \quad k_\alpha * [M] = \nu^{\chi_S(\alpha,M)}[M] * k_\alpha.
\end{aligned}$$

この時, 次のような代数埋め込みが存在する.

$$U_\nu(\mathfrak{b}_{\underline{Q}}) \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q), \quad E_i \longmapsto [S_i], \ K_i \longmapsto k_{\overline{S_i}}. \tag{2.12}$$

更に Q が有限型の場合 $\mathsf{A} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$ で, この埋め込みは同型. 逆にこの埋め込みが同型になるのは Q が有限型の場合に限る.

$\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q$ が仮定 2.4.1 の (1)–(5) を満たすことから, Hopf 代数になります (命題 2.4.3, 事実 2.4.5). 一方, 量子群も Hopf 代数でした. 代数埋め込み (2.12) は実は Hopf 代数の埋め込みになります.

定理 2.5.4 (Green [Gr95], Xiao [X97]). Ringel の代数埋め込み (2.12) は Hopf 代数埋め込み.

箙のクラスには, 有限型の他に tame と wild と呼ばれるクラスがあります. tame な箙の Ringel-Hall 代数についてはある程度研究があって, 例えば Schiffmann の講義ノート [S06, §3] で紹介されています. wild な箙についてはあまり良く分かっていないと思います. tame や wild の場合は, Ringel-Hall 代数自体は大きすぎで, その部分代数で適当なサイズのものを考えるのが自然だと思われます.

2.6 参考文献とレポート問題

この節で説明したように, Ringel-Hall 代数は Ringel が [R90a, R90b] で定式化したものです. 既に何度か参照しましたが, Schiffmann の講義ノート [S06] が大変良いレビューです. この節では Ringel の定式化通りに, ある種の有限性を満たす Abel 圏 A に対して部分対象の数え上げでもって定義される結合代数を紹介しました. 現在では以下のような類似物も「Hall 代数」と呼ばれています. (このリストは Joyce の最近のプレプリント [Joy18, §5.1.3] にあるものに少し手を加えたものです.)

- 有限体上 $\mathbb{F}_q$ での部分対象の数え上げを構造定数とする結合代数 (Ringel [R90a, R90b]).
- モチーフ的 Hall 代数.
- 対象のモジュライ空間上の構成可能函数ないしその perverse sheaf に, 幾何学的対応 (correspondence) から自然に定まる積を入れたもの (Lusztig [L91] 等).
- モジュライ空間のホモロジー群や Grothendieck 群に環構造を入れたもの (中島 [N94, N98, N01]).

§2.5 では箙の表現論が少し出てきました. それに関しては現在では非常に多くの文献がありますが, ここで

は [ASS06] と [CB] だけ挙げておきます．また量子群の文献も膨大にありますが, 例えば [CP94] や [Jos95] があります.

この節では Abel 圏 A として主に箙の表現圏を考えましたが, 他にも, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の非特異射影的代数多様体 X 上の連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層のなす圏 $\mathsf{Coh}(X)$ を考えることもできます．$\dim X = 1$, つまり代数曲線の場合, 拡大 Ringel-Hall 代数 $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{Coh}(X))$ は余積が位相的な双代数になります．種数が小さい場合は以下のことが知られています.

- X が射影直線 $\mathbb{P}^1$ の場合, $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{Coh}(\mathbb{P}^1))$ の中心拡大 $\widetilde{\mathbf{R}}'(\mathbb{P}^1)$ は $\mathfrak{sl}_2$ 量子ループ代数の Borel 部分代数 $U_\nu(L\mathfrak{b}_+)$ を部分双代数に持つ [Kapranov, [K97]].
$$U_\nu(L\mathfrak{b}_+) \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{R}}'(\mathbb{P}^1).$$
- X が楕円曲線 E の場合, $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{Coh}(E))$ の中心拡大 $\widetilde{\mathbf{R}}'(E)$ は $\mathfrak{gl}_1$ 量子トロイダル代数 (Ding・庵原・三木代数) の “Borel 部分代数” を部分双代数に持つ [Burban-Schiffmann, [BS12]].

これらの話題については Schiffmann の講義ノート [S06, §4] や私の講義ノート [柳 18, 3 日目–5 日目] をご覧下さい．種数が 2 以上の場合も Schiffmann-Vasserot [SV12] や Kapranov-Schiffmann-Vasserot [KSV17] による (双) 代数構造の研究がありますが，　表現論はまだよく分かっていません.

問題 2.1. 補題 2.1.8 を証明せよ．/ Show Lemma 2.1.8.

問題 2.2. 補題 2.2.2 を示せ．/ Show Lemma 2.2.2.

問題 2.3. 命題 2.4.2 を示せ．/ Show Proposition 2.4.2

問題 2.4. 定理 2.3.5 や命題 2.3.8 を認めて命題 2.4.3 を示せ.
Show Proposition 2.4.3 using Theorem 2.3.5 and Proposition 2.3.8

問題 2.5. Ringel の定理 2.5.3 を Q が A_2 型箙の場合に確かめよ ([S06, Example 3.15] が参考になるはず).
Check Ringel's Theorem 2.5.3 in the case Q is an A_2-type quiver (c.f. [S06, Example 3.15]).

2 日目終わり

3 Bridgeland-Hall 代数 (12/22,23)

Ringel の定理 2.5.3 や Green 及び Xiao の定理 2.5.4 によって, 単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の量子群の特殊化 $U_\nu(\mathfrak{g})$ の Borel 部分代数 $U_\nu(\mathfrak{b})$ が, Gabriel の定理 (事実 2.5.2) で対応する有限型箙 Q の表現圏 $\mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$ の Ringel-Hall 代数によって実現できました. ここで $\nu = q^{1/2} \in \mathbb{C}$ でした. つまり, 量子群の「半分」が Hall 代数で実現できる, ということでした.

この時点で, 量子群全体を Hall 代数的に構成せよ, という自然な問題が生じます. 様々な解決策が提唱されましたが, Ringel-Hall 代数の文脈で量子群全体の構成に成功したのが Bridgeland [B13] です. この節ではその解説をします. 引き続き, 断らない限り線形空間や代数等は $\mathbb{C}$ 上のものとします.

3.1 二周期複体の Ringel-Hall 代数

Abel 圏 A の図式

$$\begin{tikzcd} M^1 \arrow[r, shift left, "d_M^1"] & M^0 \arrow[l, shift left, "d_M^0"] \end{tikzcd}$$

であって $d_M^{i+1} \circ d_M^i = 0$ であるものを, A の**二周期複体**と呼びます. 添え字 i は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元とみなして下さい. また, 上記の二周期複体を $M^\bullet$ と略記します. 二周期複体の射 $s^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ を, 図式

$$\begin{tikzcd} M^1 \arrow[r, shift left, "d_M^1"] \arrow[d, "s^1"'] & M^0 \arrow[l, shift left, "d_M^0"] \arrow[d, "s^0"] \\ N^1 \arrow[r, shift left, "d_N^1"] & N^0 \arrow[l, shift left, "d_N^0"] \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

であって $s^{i+1} d_M^i = d_N^i s^i$ を満たすもののこと定めると, 射の合成が自然に定義できて, A の二周期複体のなす圏 $\mathsf{C}_2(\mathsf{A})$ が得られます. これは Abel 圏です. 実際, 零対象 0 は A の零対象を並べて得られる二周期複体で, 直和 $M^\bullet \oplus N^\bullet$ は $M^i \oplus N^i$ と $d_M^i \oplus d_N^i$ からなるものです. 射 $s^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ の核と余核は, それぞれ

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(s_1) \arrow[r, shift left, "d_M^1|_{\mathrm{Ker}(s_1)}"] & \mathrm{Ker}(s_0), \arrow[l, shift left, "d_M^0|_{\mathrm{Ker}(s_0)}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Cok}(s_1) \arrow[r, shift left, "\widetilde{d}_N^1"] & \mathrm{Cok}(s_0) \arrow[l, shift left, "\widetilde{d}_N^0"] \end{tikzcd}$$

です ($\widetilde{d}_N^i$ は d_N^i から自然に定まる射). また短完全列 $0 \to L^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{t^\bullet} N^\bullet \to 0$ は射の図式を並べた

$$\begin{tikzcd} L^1 \arrow[r, "s^1"] \arrow[d, shift right, "d_L^1"'] & M^1 \arrow[r, "t^1"] \arrow[d, shift right, "d_M^1"'] & N^1 \arrow[d, shift right, "d_N^1"'] \\ L^0 \arrow[r, "s^0"'] \arrow[u, shift right, "d_L^0"'] & M^0 \arrow[r, "t^0"'] \arrow[u, shift right, "d_M^0"'] & N^0 \arrow[u, shift right, "d_N^0"'] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

であって $0 \to L^i \xrightarrow{s^i} M^i \xrightarrow{t^i} L^i \to 0$ が完全なもののことです. この Abel 圏 $\mathsf{C}_2(\mathsf{A})$ について, 次の主張が成立します.

補題 3.1.1. A が仮定 2.4.1 の (1) と (2) を満たすなら, 圏 $\mathsf{C}_2(\mathsf{A})$ もそうである.

証明は問題 3.1 にします.

補題 3.1.1 と定理 2.5.3 から, 単位的結合代数

$$\mathbf{H}\big(\mathsf{C}_2(\mathsf{A})\big) = \big(\mathrm{F}(\mathsf{C}_2(\mathsf{A})), \circ, [0]\big)$$

が定まります. しかしこの代数は 作りたい「$\mathbf{H}(\mathsf{A})$ の 2 倍」よりずっと大きくなってしまいます. Bridgeland [B13] の最初の工夫は, $\mathsf{C}_2(\mathsf{A})$ 全体を考えずに, ずっと小さい部分で, A を 2 つ分含むようなものを取り出した事です.

正確な説明をしましょう. Abel 圏 A に次の仮定を置きます.

仮定 3.1. A は以下の条件を満たす Abel 圏とする.

- 本質的に小かつ射集合は有限集合.
- $\mathbb{F}_q$ 上線形.
- 大域次元は有限で, かつ豊富な射影的対象を持つ.

$\mathsf{P}_\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$ を射影的対象のなす充満部分圏とし, また二周期複体 $M^\bullet$ で $M^i \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ となるものののなす充満部分圏を

$$\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}) \subset \mathsf{C}_2(\mathsf{A})$$

と書きます. 次の補題に注意しておきます (証明は問題 3.2).

補題 3.1.2. $\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ は拡大で閉じている.

$\mathrm{Iso}\big(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})\big)$ が張る部分線形空間を

$$\mathrm{F}\big(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})\big) \subset \mathrm{F}\big(\mathsf{C}_2(\mathsf{A})\big)$$

と書きます. 補題 3.1.2 からこれは $\circ$ で閉じています. 対応する部分代数を次のように書きます

$$\mathbf{H}\big(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})\big) := \big(\mathrm{F}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})), \circ, [0]\big)$$

Ringel-Hall 代数による量子群の「半分」の実現では, 積 $\circ$ を Euler 形式でツイストした $*$ が使われました. Bridgeland の第 2 の工夫は, その $\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ における類似を導入した事です. 次の補題の証明も易しいので, 問題 3.3 にします.

補題 3.1.3. $\nu = q^{1/2} \in \mathbb{C}$ とする. $\mathbf{H}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ の積 $\circ$ を

$$[M^\bullet] * [N^\bullet] := \nu^{\chi(M^0,N^0)+\chi(M^1,N^1)}[M^\bullet] \circ [N^\bullet]$$

とツイストすると,

$$\mathbf{R}\big(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})\big) := \big(\mathrm{F}(\mathsf{C}_2(\mathsf{A})), *, [0]\big)$$

は単位的結合代数.

3.2 非可換局所化と Bridgeland-Hall 代数

次に Bridgeland の第 3 の工夫を説明します. ここが最も非自明です. 目的の代数 $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ は非可換な代数 $\mathbf{H}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ を**非輪状複体のなす部分集合で局所化**したものになります. ここで:

定義 3.2.1. 二周期複体 $M^\bullet$ が非輪状 $:\Longleftrightarrow$ $H^*(M^\bullet)=0$, つまり各 $i\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対して $H^i(M^\bullet) \coloneqq \operatorname{Ker} d_M^i / \operatorname{Im} d_M^{i+1}=0$.

仮定 3.1 のうち, 大域次元の有限性を思い出して下さい.. $\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ の非輪状対象は次のように明示できます.

補題 3.2.2. $M^\bullet\in\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ が非輪状なら $M^\bullet\simeq K_P\oplus K_Q^*$ なる射影的対象 $P,Q\in\mathsf{P}_\mathsf{A}$ が一意に存在. 但し

$$K_P \coloneqq \left(P \underset{0}{\overset{\mathrm{id}_P}{\rightleftarrows}} P\right), \quad K_Q^* \coloneqq \left(Q \underset{-\mathrm{id}_Q}{\overset{0}{\rightleftarrows}} Q\right).$$

証明. $\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ の対象

$$M^1 \underset{d_M^0}{\overset{d_M^1}{\rightleftarrows}} M^0$$

が非輪状だと仮定する. $P\coloneqq \operatorname{Im}(d_M^0)=\operatorname{Ker}(d_M^1)$, $Q\coloneqq\operatorname{Ker}(d_M^0)=\operatorname{Im}(d_M^1)$ と置くと, 短完全列

$$0\longrightarrow P\longrightarrow M^1\longrightarrow Q\longrightarrow 0,\quad 0\longrightarrow Q\longrightarrow M^0\longrightarrow P\longrightarrow 0$$

がある. それぞれから生じる $\operatorname{Hom}_\mathsf{A}(\cdot,\cdot)$ の長完全列を見ると, $M^i\in\operatorname{Ob}(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ から任意の $j\geq 1$ に対して

$$\operatorname{Ext}^j_\mathsf{A}(P,\cdot)\simeq\operatorname{Ext}^{j+1}_\mathsf{A}(Q,\cdot)\simeq\operatorname{Ext}^{j+2}_\mathsf{A}(P,\cdot).$$

A の大域次元は有限だから, これらの Ext 群はすべて消える. つまり $P,Q\in\operatorname{Ob}(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ は射影的対象. よって上記の 2 つの短完全列は分裂して, それから $M^\bullet=K_P\oplus K_Q^*$ が従う. □

非輪状対象は積 $*$ に関して次のように振る舞います. 証明は §3.5 で説明します.

命題 3.2.3. 任意の対象 $P\in\mathsf{P}_\mathsf{A}$ と任意の複体 $M^\bullet\in\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ に対して

$$\begin{aligned}
[K_P]*[M^\bullet] &= \nu^{\chi(P,M^\bullet)}[K_P\oplus M^\bullet]=\nu^{\chi(P,M^\bullet)+\chi(M^\bullet,P)}[M^\bullet]*[K_P],\\
[K_P^*]*[M^\bullet] &= \nu^{-\chi(P,M^\bullet)}[K_P^*\oplus M^\bullet]=\nu^{-\chi(P,M^\bullet)-\chi(M^\bullet,P)}[M^\bullet]*[K_P^*].
\end{aligned}$$

但し $\chi(P,M^\bullet)\coloneqq\chi(P,M^1)-\chi(P,M^0)$, $\chi(M^\bullet,P)\coloneqq\chi(M^1,P)-\chi(M^0,P)$. 特に $P,Q\in\mathsf{P}_\mathsf{A}$ に対して

$$[K_P]*[K_Q]=[K_{P\oplus Q}],\quad [K_P]*[K_Q^*]=[K_P\oplus K_Q^*],\quad [K_P^*]*[K_Q^*]=[K_{P\oplus Q}^*]. \tag{3.3}$$

補題 3.2.2 と命題 3.2.3 から次の主張が直ちに従います.

命題 3.2.4. $\mathbf{R}\coloneqq\mathbf{R}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ の部分集合

$$S\coloneqq\{[M^\bullet]\mid M^\bullet\in\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}),\ H^*(M^\bullet)=0\}\subset\mathbf{R}$$

は次の $*$ に関する積閉集合と等しい.

$$S=\langle [K_P],[K_P^*]\mid P\in\operatorname{Ob}(\mathsf{P}_\mathsf{A})\rangle_{\mathrm{alg}}. \tag{3.4}$$

更にこれは, 以下の **Ore 条件**を満たす.

- 任意の $r\in\mathbf{R}$ と $s\in S$ に対して, $r'\in\mathbf{R}$ と $s'\in S$ が存在して $r*s'=s*r'$.
- $r\in\mathbf{R}$ と $s\in S$ が $s*r=0$ を満たすとき, $s'\in S$ が存在して $r*s'=0$.

よって非可換局所化ができて, 結合代数 $\mathbf{R}[S^{-1}]$ が定まります. 以上の議論をまとめると:

定義 3.2.5. A は次の条件を満たす Abel 圏とする.

- 本質的に小かつ射集合は有限集合.
- $\mathbb{F}_q$ 上線形.
- 大域次元は有限で, かつ豊富な射影的対象を持つ.

$\nu := q^{1/2} \in \mathbb{C}$ とする. 結合代数 $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ を $\mathbf{R}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ の局所化で以下のように定義し, **Bridgeland-Hall 代数**と呼ぶ.

$$\mathbf{BH}(\mathsf{A}) := \mathbf{R}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))\big[[M^\bullet]^{-1} \mid H^*(M^\bullet) = 0\big].$$

次の §3.4 の準備として, Bridgeland-Hall 代数の簡約を導入しておきます. 射影的対象 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ に対して補題 3.2.2 の $K_P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ を対応させる写像は, 群準同型

$$K_0(\mathsf{A}) \longrightarrow \mathbf{BH}(\mathsf{A})^\times, \quad \alpha \longmapsto K_\alpha$$

を誘導します. 実際, 任意の $\alpha \in K_0(\mathsf{A})$ は $\alpha = \overline{P} - \overline{Q}$, $P, Q \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ と書けますが, それを用いて

$$K_\alpha := [K_P] * [K_Q]^{-1} \tag{3.5}$$

と定めれば良いです (well-defined であること等は問題 3.4). また K_P^* を使えばもう一つの群準同型が得られます.

$$K_0(\mathsf{A}) \longrightarrow \mathbf{BH}(\mathsf{A})^\times, \quad \alpha \longmapsto K_\alpha^* := [K_P^*] * [K_Q^*]^{-1}. \tag{3.6}$$

定義 3.2.6. 定理 3.3.2 の状況で, 単位的結合代数 $\mathbf{BH}(\mathsf{A})_{\mathrm{red}}$ を

$$\mathbf{BH}(\mathsf{A})_{\mathrm{red}} := \mathbf{BH}(\mathsf{A})/\big([M^\bullet - 1 \mid M^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})),\, H^*(M^\bullet) = 0,\, M^\bullet \simeq (M^\bullet)^*\big)$$

で定義し, **簡約** (reduced) **Bridgeland-Hall 代数**と呼ぶ.

補題 3.2.2 より, $\mathbf{BH}(\mathsf{A})_{\mathrm{red}}$ は $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ に関係式

$$[K_P] * [K_P^*] = 1$$

を課して得られる代数に他なりません.

3.3 三角分解

Bridgeland は A が遺伝的で, かつ $K_0(\mathsf{A})$ が良い性質を満たす場合に $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ の三角分解を定義し, 命題 2.4.2 の拡大 Ringel-Hall 代数 $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A})$ と $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ との関係を調べました [B13, §4]. この事をこの副節で解説します.

線形空間としては

$$\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) = \mathrm{F}(\mathsf{A}) \otimes \mathbb{C}[K_0(\mathsf{A})] = \bigoplus_{M \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \mathbb{C}[M] \otimes \bigoplus_{\alpha \in K_0(\mathsf{A})} \mathbb{C}k_\alpha$$

であることを思い出しておいて下さい.

この副節では Abel 圏 A に以下の条件を課します.

仮定 3.3.1. A は以下の条件を満たす圏とする.

- 本質的に小で $\mathbb{F}_q$ 上線形な有限的 Abel 圏.
- 豊富な射影的対象を持つ. $\mathsf{P}_{\mathsf{A}} \subset \mathsf{A}$ で射影的対象のなす忠実部分圏を表す.
- 遺伝的.
- $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A}) \setminus \{0\}$ の定める $\overline{M} \in K_0(\mathsf{A})$ は 0 ではない.

仮定 3.3.1 の (1)–(3) から Bridgeland-Hall 代数 $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ が定まります (定義 3.2.5).

定理 3.3.2. 圏 A は仮定 3.3.1 を満たすものとする. また $\nu := q^{1/2} \in \mathbb{C}$ とする. この時, 以下のような線形同型がある.

$$\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) \otimes \widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) \longrightarrow \mathbf{BH}(\mathsf{A}),$$
$$[M]k_\alpha \otimes [N]k_\beta \longmapsto \frac{1}{a_M a_N}(E_M * K_\alpha) * (F_N * K^*_\beta).$$

但し E_M, F_N は定義 3.3.6, K_α は (3.5), K^*_β は (3.6) で与えられる. 更にこの線形同型は次の 2 つの代数埋め込みを定める.

$$\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) \rightrightarrows \mathbf{BH}(\mathsf{A}), \quad a_M \cdot [M]k_\alpha \longmapsto E_M * K_\alpha,\ F_M \otimes K^*_\alpha.$$

上の同型に現れた E_M や F_N を以下で説明します. 次に A が遺伝的で射影的対象を豊富に持つことから, 任意の $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ は次のような分解を持ちます.

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0. \tag{3.7}$$

有限的, 特に射集合が有限であることから, A は Krull-Schmidt 性を持つので, $P = \bigoplus_i P_i$, $Q = \bigoplus_j Q_j$ と分解します. それと対応して射 f も $f_{ij}\colon P_i \to Q_j$ 達の直和に分解します.

定義 3.3.3. 射影分解 (3.7) は, 分解 $f = \bigoplus_{i,j} f_{ij}$ のどの f_{ij} も同型ではない時, **極小** (minimal) であるという.

次の主張の証明は難しくないですが略します.

補題 3.3.4 ([B13, Lemma 4.1])**.** どの射影分解 (3.7) も次の形の完全列と同型である.

$$0 \longrightarrow R \oplus P' \xrightarrow{\mathrm{id} \oplus f'} R \oplus Q' \xrightarrow{(0,g')} M \longrightarrow 0.$$

ここで $R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P})$ であり, また $0 \to P' \xrightarrow{f'} Q' \xrightarrow{g'} M \to 0$ は極小な射影分解である. 特に M の 2 つの極小射影分解は同型である. この極小射影分解を次のように表す.

$$0 \longrightarrow P_M \xrightarrow{f_M} Q_M \xrightarrow{g_M} M \longrightarrow 0 \tag{3.8}$$

この補題から次の定義が well-defined です.

定義 3.3.5. 任意の $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対し, 極小射影分解 (3.8) を使って $C^\bullet_M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_A))$ を次の二周期複体として定義する.

$$C^\bullet_M := \Bigl(P_M \underset{0}{\overset{f_M}{\rightleftarrows}} Q_M \Bigr)$$

$C^\bullet_M$ を用いて定理 3.3.2 の E_M 達を次のように定義します.

定義 3.3.6. 任意の $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して, 極小射影分解 (3.8) と定義 3.3.5 の二周期複体 $C^\bullet_M$ を用いて $E_M \in \mathbf{BH}(\mathsf{P_A})$ を次で定義する.

$$E_M := \nu^{\chi(P_M, M)} K_{-\overline{P_M}} * a_{C^\bullet_M} [C^\bullet_M].$$

また $\mathsf{C}_2(\mathsf{P_A})$ 上の対合 (involution) $*$ を

$$\left(M^1 \underset{d^0}{\overset{d^1}{\rightleftarrows}} M^0\right) \overset{*}{\longleftrightarrow} \left(M^0 \underset{-d^1}{\overset{-d^0}{\rightleftarrows}} M^1\right)$$

で定めると, それは代数 $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ の対合 $*$ を誘導する (問題 3.5). それを用いて $F_M \in \mathbf{BH}(\mathsf{P_A})$ を次で定義する.

$$F_M := (E_M)^*.$$

注意 3.3.7. 対合 $*$ は複体のシフト [1] に他なりません. また補題 3.2.2 の二周期複体 K^*_P は対合 $*$ を使って $K^*_P = (K_P)^*$ と書けます.

注意 3.3.8. E_M の定義で極小射影分解の代わりに極小でない射影分解を使ってみます. P_M の代わりに $P_M \oplus R$, $R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P_A})$ を用いるということですが, 命題 3.2.3 を使って計算すると

$$t^{\chi(P_M \oplus R, M)} K_{-(\overline{P_M}+\overline{R})} * [K_R \oplus C^\bullet_A] = t^{\chi(P_M, M)} K_{-\overline{P_M}} * [C^\bullet_A]$$

となって, 結局同じものが得られます.

では定理 3.3.2 の証明にとりかかります. まず拡大する前の Ringel-Hall 代数 $\mathbf{R}(\mathsf{A}) \subset \widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A})$ を考えます.

命題 3.3.9 ([B13, Lemma 4.3])**.** 次の代数埋め込みがある.

$$\mathbf{R}(\mathsf{A}) \hookrightarrow \mathbf{BH}(\mathsf{A}), \quad [\![M]\!] := a_M [M] \longmapsto E_M.$$

略証. 積の計算に出てくる ν 冪は $\nu^\star$ と省略して説明する.

まず $\mathbf{R}(\mathsf{A})$ の積 $[L] * [M] = \nu^\star \sum_{[N]} g^N_{L,M} [N]$ の構造定数 $g^N_{L,M} = e^N_{L,M}/a_L a_M$ を $[\![M]\!]$ で書き換えると

$$[\![L]\!] * [\![M]\!] = \nu^\star \sum_{[N] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \frac{e^N_{L,M}}{a_N} [\![N]\!] = \nu^\star \sum_{[N] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \frac{\left|\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(L, M)_N\right|}{|\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(L, M)|} [\![N]\!]. \tag{3.9}$$

ここで部分集合 $\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(L, M)_N \subset \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(L, M)$ を, 拡大であって中央項が N と同型であるものの同値類 (事実 2.0.1 参照) からなるもの (最後の等号に証明は問題 3.6).

$M_1, M_2 \in \mathrm{Ob}(A)$ の極小射影分解を

$$0 \longrightarrow P_i \xrightarrow{f_i} Q_i \longrightarrow M_i \longrightarrow 0$$

と書き, それから定まる $C^\bullet_{M_i} \in \mathsf{C}_2(\mathsf{P_A})$ と $E_{M_i} \in \mathbf{BH}(\mathsf{A})$ を考える. 命題 3.2.3 を使って積を計算すると

$$E_{M_1} * E_{M_2} = \nu^\star K_{-\overline{P_1}-\overline{P_2}} * [\![C^\bullet_{M_1}]\!] * [\![C^\bullet_{M_2}]\!]. \tag{3.10}$$

但し $[\![L^\bullet]\!] := a_{L^\bullet}[L^\bullet]$. (3.9) から

$$[\![C^\bullet_{M_1}]\!] * [\![C^\bullet_{M_2}]\!] = \nu^\star \sum_{[N^\bullet] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{C}_2(\mathsf{A}))} \frac{\left|\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(C^\bullet_{M_1}, C^\bullet_{M_2})_{N^\bullet}\right|}{\left|\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(C^\bullet_{M_1}, C^\bullet_{M_2})\right|} [\![N^\bullet]\!] \tag{3.11}$$

ここで $C^\bullet_{M_1}$ と $C^\bullet_{M_2}$ の拡大 $N^\bullet$ がどのようなものかを考える．$C^\bullet_{M_i}$ は M_i と擬同型だから,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(C^\bullet_{M_1}, C^\bullet_{M_2}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(M_1, M_2).$$

よって拡大 $N^\bullet$ の同値類 (事実 2.0.1 参照) に対応する, M_1 の M_2 による拡大 $M_3 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ の同値類がある．更に $N^\bullet \simeq C^\bullet_{M_3}$ であることが示せる．実際, 二周期複体の拡大を (3.2) の形で書くと, $N^\bullet$ は可換完全図式

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift right, "f_2"'] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "u"'] & P_1 \arrow[d, shift right, "f_1"'] \\ Q_2 \arrow[r, "i"] \arrow[u, shift right, "0"'] & Q_1 \oplus Q_2 \arrow[r, "p"] \arrow[u, shift right, "v"'] & Q_2 \arrow[u, shift right, "0"'] \end{tikzcd}$$

の中央の列のようになる．f_i 達が単射だから u も単射で, $u \circ v = 0$ より $v = 0$．これから $N^\bullet \simeq C^\bullet_{M_3}$ が従う．また, 次の全単射があることも分かる．

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(C^\bullet_{M_1}, C^\bullet_{M_2})_{N^\bullet} \xrightarrow{=} \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(M_1, M_2)_{M_3}.$$

(3.11) の計算に戻る．分母の $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(C^\bullet_{M_1}, C^\bullet_{M_2})$ について, 次の短完全列を使う．

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(Q_1, P_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathsf{A})}(C^\bullet_{M_1}, C^\bullet_{M_2}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M_1, M_2) \longrightarrow 0.$$

すると (3.11) は以下のようになる．

$$[\![C^\bullet_{M_1}]\!] * [\![C^\bullet_{M_2}]\!] = \nu^\star \sum_{[M_3] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \frac{\left|\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(M_1, M_2)_{M_3}\right|}{|\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M_1, M_2)|} [\![C^\bullet_{M_3}]\!].$$

(3.10) の右辺にこの結果を代入して, 更に (3.3.8) を使うと

$$E_{M_1} * E_{M_2} = \nu^\star \sum_{[M_3] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \frac{\left|\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(M_1, M_2)_{M_3}\right|}{|\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M_1, M_2)|} E_{M_3}.$$

(3.9) より構造定数が $[\![M_1]\!] * [\![M_2]\!]$ のものと一致することが分かる．　□

E_M と K_α の関係式は命題 3.2.3 から計算できて, それから次が従います．

系 3.3.10. 次の代数埋め込みがある．

$$\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) \hookrightarrow \mathbf{BH}(\mathsf{A}), \quad [\![M]\!] \longmapsto E_M, \ K_\alpha \longmapsto K_\alpha.$$

これに対合 $*$ を施すと "下三角部分" の埋め込みも得られます．

$$\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A}) \hookrightarrow \mathbf{BH}(\mathsf{A}), \quad [\![N]\!] \longmapsto F_N, \ K_\beta \longmapsto K^*_\beta.$$

これで定理 3.3.2 の後半が示せました．前半は次の補題を使って示すことができます [B13, Lemma 4.7].

補題 3.3.11 ([B13, Lemma 4.2])**.** 任意の $M^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ に対して $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ 及び $P, Q \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ が同型を除いて一意に存在して

$$M^\bullet = C^\bullet_A \oplus (C^\bullet_B)^* \oplus K_P \oplus K^*_Q.$$

更に $A \simeq H^0(M^\bullet)$, $B \simeq H^1(M^\bullet)$.

以上で定理 3.3.2 の証明の説明は終わりです．系として次の系 3.3.12 が得られますが, それがタイトルの「三角分解」の意味です．

系 3.3.12. 次の線形同型が存在する．

$$\mathbf{R}(\mathsf{A}) \otimes \mathbb{C}[K_0(\mathsf{A})] \otimes \mathbf{R}(\mathsf{A}) \longrightarrow \mathbf{BH}(\mathsf{A})_{\mathrm{red}}, \quad [M] \otimes k_\alpha \otimes [N] \longmapsto E_M * K_\alpha * F_N.$$

3.4 量子群との関係

前節で解説した話の続いて Bridgeland は, Abel 圏 A が有限型箙 Q の $\mathbb{F}_q$ 上の表現圏の場合, $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ の簡約 $\mathbf{BH}(\mathsf{A})_{\mathrm{red}}$ がパラメータ $\nu := q^{1/2}$ の量子群 $U_\nu(\mathfrak{g}_{\underline{Q}})$ を実現することを示しました [B13, Theorems 1.1, 4.9]. この話を解説します.

前節までの議論で E_M 同士や F_N 同士, それらと K_M, K_M^* の関係式が得られています. 残っている関係式は E_M と F_N ですが, まず次の主張が示せます.

補題 3.4.1 ([B13, Lemma 4.4])**.** $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ が $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M,N) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(N,M)$ を満たせば $E_M * F_N = F_N * E_M$.

略証. $E_M * F_N$ を計算するのに (3.9) を使うと $\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{C}(\mathsf{A})}(C_M^\bullet, (C_N^\bullet)^*)$ を見ることになる. 後で示す補題 3.5.2 を使うと

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(C_M^\bullet, (C_N^\bullet)^*) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_2(\mathsf{A})}(C_M^\bullet, C_N^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M,N) \tag{3.12}$$

で, 仮定からこれは消えるから $[C_M^\bullet] * [(C_N^\bullet)^*] = \nu^\star [C_M^\bullet \oplus C_N^\bullet]$. これから

$$E_M * F_N = \nu^\star K_{-\overline{P_1}} * K^*_{-\overline{P_2}} * [C_M^\bullet \oplus C_N^\bullet].$$

が示せる. 注意深く計算すると $\star$ が M と N に関して対称なことが分かる. 更に $F_N * E_M$ は $E_N * F_M$ に対合 $*$ を施したものであることを使うと $E_M * F_N = F_N * E_M$ が従う. □

次の計算をすれば量子群と関係する場合の関係式が全て得られたことになります.

補題 3.4.2 ([B13, Lemma 4.5])**.** $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ が $\mathrm{End}_{\mathsf{A}}(M) = \mathbb{F}_q$ を満たせば

$$E_M * F_M - F_M * E_M = (q-1)(K^*_{\overline{M}} - K_{\overline{M}}).$$

略証. (3.12) より $\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(C_M^\bullet, (C_M^\bullet)^*) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M,M)$ で, 仮定よりこれが 1 次元. またコホモロジー長完全列を見ることで, $\mathsf{C}_2(\mathsf{P})$ での拡大

$$0 \longrightarrow (C_M^\bullet)^* \longrightarrow N^\bullet \longrightarrow C_M^\bullet \longrightarrow 0$$

が分裂しなければ, $N^\bullet$ は非輪状であることが分かる. よって補題 3.2.2 から $N^\bullet \simeq K_P \oplus K_Q^*$, $P, Q \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P}_{\mathsf{A}})$ と書ける. また $K_0(\mathsf{A})$ において $\overline{Q} - \overline{P} = \overline{M}$. これらから

$$[C_M^\bullet] * [(C_M^\bullet)^*] = \nu^* \big([C_M^\bullet \oplus (C_M^\bullet)^*] + (q-1)[K_P \oplus K_Q^*]\big)$$

が従う. E_M と F_M にして ν 冪を計算すると

$$E_M * F_M = K_{-\overline{P}} * K^*_{-\overline{P}} * \big([C_M^\bullet \oplus (C_M^\bullet)^*] + (q-1) K_P * K_Q^*\big).$$

これに対合 $*$ を施すと $F_M * E_M$ も計算できて, 結論が得られる. □

これらの主張と定理 3.3.2, 及び Ringel の定理 2.5.3 と組み合わせることで, 次の主張が得られます. これが量子群全体の Hall 代数による構成です.

定理 3.4.3. $\nu := q^{1/2} \in \mathbb{C}$ とすると, ループの無い箙 Q の $\mathbb{F}_q$ 上の冪零表現圏 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q$ について,

$$U_\nu(\mathfrak{g}_Q) \longrightarrow \mathbf{BH}(\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q)_{\mathrm{red}}, \quad E_i \longmapsto \frac{E_{S_i}}{q-1},\ F_i \longmapsto \frac{F^*_{S_i}}{\nu-\nu^{-1}},\ K_i^{\pm1} \longmapsto (K_{\overline{S_i}}\text{ の同値類})^{\pm1}$$

で代数埋め込みが定まる. 更に Q が有限型 ($\underline{Q}$ の連結成分が Dynkin 図形) なら, この埋め込みは同型.

上記の定理 3.4.3 は $\mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$ の場合のみを扱っていますが, より一般の圏の場合も類似の主張が成立します. その為に Drinfeld ダブルを導入します.

定義 3.4.4. B を単位的かつ余単位的な双代数とし, $(\cdot,\cdot)$ をその上の Hopf 内積とする. この時, 線形空間 $B \otimes B$ 上に次の条件を満たす結合代数の構造 $\circ$ が一意に定まる:

- 2 つの線形写像 $B \rightrightarrows B \otimes B$: $a \mapsto a \otimes 1$ 及び $a \mapsto 1 \otimes a$ は共に代数埋め込み.
- $(a \otimes 1) \circ (1 \otimes b) = a \otimes b$
- $\sum (a_{(2)}, b_{(1)})(a_{(1)} \otimes 1) \circ (1 \otimes b_{(2)}) = \sum (a_{(1)}, b_{(2)})(1 \otimes b_{(1)}) \circ (a_{(2)} \otimes 1)$.

但し $1 = 1_B$ は B の単位元で, $\Delta_B(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ は B の余積の Sweedler 記法. 得られた代数

$$(B \otimes B, \circ, 1 \otimes 1)$$

を B の **Drinfeld ダブル**と呼ぶ.

定理 3.4.5 ([B13, Theorem 1.2], 証明は例えば [Y16])**.** A は仮定 3.3.1 を満たす Abel 圏とする. この時 $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ は $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathsf{A})$ の Drinfeld ダブルと代数同型.

更に Drinfeld ダブルには双代数の構造を入れることができます. Hopf 代数の Drinfeld ダブルには更に Hopf 代数の構造を入れることもできます. こうやって, 量子群の (環構造に限らず) Hopf 代数構造全てが Bridgeland-Hall 代数でも実現できることになります.

3.5 命題 3.2.3 の証明

§3.2 の状況に戻って, A は定義 3.2.5 の条件を満たす Abel 圏とし, $\mathsf{P_A} \subset \mathsf{A}$ を射影的対象のなす忠実部分圏とします.

定義 3.5.1. 二周期複体 $M^\bullet, N^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_2(\mathsf{A}))$ の射 $s^\bullet, t^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ が**ホモトピック**であるとは, $h^i \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(M^i, N^{i+1})$ $(i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ であって次が成立するものが存在することを言う.

$$t^i - s^i = d_N^{i+1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_M^i$$

$\mathsf{C}_2(\mathsf{P_A}) \subset \mathsf{C}_2(\mathsf{A})$ からホモトピックな射を同一視して得られる圏をそれぞれ

$$\mathrm{Ho}_2(\mathsf{P_A}) \subset \mathrm{Ho}_2(\mathsf{A})$$

と書き, 二周期複体の**ホモトピー圏**と呼ぶ.

ホモトピー圏では $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P_A})$ が定める二周期複体 K_P と零複体 0 は同型です. このことを「K_P は 0 とホモトピー同値」と呼びます.

命題 3.2.3 の証明の為に, 次の補題を示します.

補題 3.5.2 ([B13, Lemma 3.3]). $M^\bullet, N^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A}))$ に対して

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(N^\bullet, M^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_2(\mathsf{A})}(N^\bullet, (M^\bullet)^*).$$

但し $*$ は定義 3.3.6 で与えた $\mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ 上の対合.

証明. $\mathsf{C}_2(\mathsf{A})$ の短完全列

$$0 \longrightarrow M^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow N^\bullet \longrightarrow 0 \tag{3.13}$$

をとすると, $M^i, N^i \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ より, それは $\mathsf{C}_2(\mathsf{A})$ での可換図式

$$\begin{tikzcd} M^1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift right, "f_M"'] & M^1 \oplus N^1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "f"'] & N^1 \arrow[d, shift right, "f_N"'] \\ M^0 \arrow[r, "i"] \arrow[u, shift right, "g_M"'] & M^0 \oplus N^0 \arrow[r, "p"] \arrow[u, shift right, "g"'] & N^0 \arrow[u, shift right, "g_N"'] \end{tikzcd}$$

と同型. 但し i は標準的な包含であり, p は標準的な射影. f と g を行列の形で書くと

$$f = \begin{bmatrix} f_M & s^1 \\ 0 & f_N \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_M & s^0 \\ 0 & g_N \end{bmatrix}.$$

但し $s^i \in \mathrm{Hom}_\mathsf{P}(N^i, M^{i+1})$. すると条件 $fg = gf = 0$ は

$$s^\bullet \colon N^\bullet \longrightarrow (M^\bullet)^* \tag{3.14}$$

が二周期複体の射であることと同値. このことから短完全列 (3.13) から射 (3.14) が定まり, 逆に射 (3.14) から短完全列 (3.13) が定まることが分かる.

次に $s^\bullet, \widetilde{s}^\bullet \colon M^\bullet \longrightarrow (N^\bullet)^*$ から定まる短完全列 (3.13) の中央の二周期複体を $P^\bullet, \widetilde{P}^\bullet$ とする. 短完全列 (3.13) が同じ Ext^1 の類を定めることは, $\mathsf{C}_2(\mathsf{A})$ の同型 $k^\bullet \colon P^\bullet \to \widetilde{P}^\bullet$ であって $\mathrm{id}_{M^\bullet}$ 及び $\mathrm{id}_{N^\bullet}$ と可換なものが存在することと同値. そのような $k^\bullet$ を行列で書くと

$$k^1 = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{M^1} & h^1 \\ 0 & \mathrm{id}_{N^1} \end{bmatrix}, \quad k^0 = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{M^0} & h^0 \\ 0 & \mathrm{id}_{N^0} \end{bmatrix}.$$

但し $h^i \in \mathrm{Hom}_\mathsf{A}(N^i, M^i)$. すると $k^\bullet$ が二周期複体の射であることは図式

$$\begin{tikzcd} M^1 \oplus N^1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "k^1"'] & M^0 \oplus N^0 \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[d, "k^0"] \\ M^1 \oplus N^1 \arrow[r, shift left, "\widetilde{f}"] & M^0 \oplus N^0 \arrow[l, shift left, "\widetilde{g}"] \end{tikzcd}$$

が可換であることと同値で, それは $h^\bullet$ が $s^\bullet$ と $\widetilde{s}^\bullet$ のホモトピーであることと同値. □

命題 *3.2.3* の証明. 主張の前半の最初, つまり $P \in \mathsf{P}_\mathsf{A}$ と $M^\bullet \in \mathsf{C}_2(\mathsf{P}_\mathsf{A})$ に対して

$$[K_P] * [M^\bullet] = \nu^{\chi(P,M^\bullet)}[K_P \oplus M^\bullet] = \nu^{\chi(P,M^\bullet)+\chi(M^\bullet,P)}[M^\bullet] * [K_P]$$

であることだけ示す.

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(K_P, M^\bullet) = \mathrm{Hom}_\mathsf{A}(P, M^1), \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_2(\mathsf{A})}(M^\bullet, K_P) = \mathrm{Hom}_\mathsf{A}(M^0, P) \tag{3.15}$$

であることが簡単に示せる (問題 3.7). 二周期複体 K_P は零複体とホモトピー同値だから, 補題 3.5.2 より $[K_P] * [M^\bullet]$ 及び $[M^\bullet] * [K_P]$ に現れる Ext 群は消える. □

3.6 参考文献とレポート問題

冒頭で述べた, 量子群全体を Hall 代数的に構成せよという問題に関して最初に答えを与えたのは, 中島啓先生による箙多様体の同変 K 群を使った, 量子群の表現の幾何学的構成 [N01] だと思われます. この構成は §2.6 で少し触れたもので, Hall 代数の仲間の一つですが, 「対象の数え上げ」という意味の Ringel-Hall 代数ではありません. 表現の代わりに複体を数え上げることで量子群全体を明示的に構成したのは, この節で紹介した Bridgeland の仕事 [B13] が初めてだと思われます.

双代数または Hopf 代数の Drinfeld ダブルは quantum double という名前で Drinfeld が [D87] で導入しました. 一般論は [CP94, §4.2 D] や [Jos95, §3.2] が詳しいです. Drinfeld ダブルの定理 3.4.5 について, Bridgeland は [B13] に証明を書きませんでしたが, 私が [Y16] で示しました.

[B13] の後, Bridgeland-Hall 代数の一般化や, それに対応した定理 3.4.5 の類似が与えられています. Gorsky [Go18] はある種の有限性を満たす完全圏 C に対して, その (二周期) 複体に対する **semi-derived Hall 代数**を導入しました. この方向で興味深い最近の研究が Lu と Peng の論文 [LP21] で, そこでは二周期的の semi-derived Hall 代数に対する定理 3.4.5 を証明しています. 彼らの設定で特別すべきことは, C が射影的対象を豊富に持たなくても適用できる点です. 遺伝的だが射影的対象が豊富に存在しない Abel 圏は良く知られていて, 例えばループがある箙の表現圏や非特異射影曲線上の連接層の圏があります. これらに対して [LP21] を適用することで, 量子群の仲間の研究が更に進展することが期待されています.

問題 3.1. 補題 3.1.1 を証明せよ. / Show Lemma 3.1.1.

問題 3.2. 補題 3.1.2 を証明せよ. / Show Lemma 3.1.2.

問題 3.3. 補題 3.1.3 を証明せよ. / Show Lemma 3.1.3.

問題 3.4. (3.4) が well-defined であり, 群準同型 $K_0(\mathsf{A}) \to \mathbf{BH}(\mathsf{A})^\times$ を定めることを確認せよ.

Show that the map (3.4) is well-defined and gives a group homomorphism $K_0(\mathsf{A}) \to \mathbf{BH}(\mathsf{A})^\times$.

問題 3.5. 定義 3.3.6 で定めた $C_2(\mathsf{P})$ 上の対合 $*$ が代数 $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$ の対合を誘導することを示せ.

Show that the involution on $C_2(\mathsf{P})$ given in 定義 3.3.6 induces an algebra involution on $\mathbf{BH}(\mathsf{A})$.

問題 3.6. A を有限的な Abel 圏とし, $L, M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ とする. (3.9) で用いた等式

$$\frac{|\mathrm{Ex}_{L,M}^{N}|}{|\mathrm{Aut}_{\mathsf{A}}(N)|} = \frac{|\mathrm{Ext}_{\mathsf{A}}^{1}(L, M)_N|}{|\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(L, M)|} \tag{3.16}$$

を示せ. (短完全列の集合 $\{0 \to M \xrightarrow{a} N \xrightarrow{b} L \to 0\}$ に左から $\mathrm{Aut}_{\mathsf{A}}(N)$ が $(a, b) \mapsto (ga, bg^{-1})$ で作用する. この作用が遷移的で, 固定化部分群の濃度が $|\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(L, M)|$ であることを言えばよい. 分からなければ [R96, p.5, Proposition 3; p.6, Proposition 4] を参照のこと.)

Show the identity (3.16) for given objects L, M, N of a finitary abelian category. (Consider the action of $\mathrm{Aut}_{\mathsf{A}}(N)$ on the set $\{0 \to M \xrightarrow{a} N \xrightarrow{b} L \to 0\}$ of exact sequences given by $(a, b) \mapsto (ga, bg^{-1})$. It is enough to show that the action is transitive and the stabilizer subgroup is isomorphic to $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(L, M)$. See [R96, p.5, Proposition 3; p.6, Proposition 4] if necessary.)

問題 3.7. (3.15) を示せ. / Show (3.7).

4 導来 Hall 代数 (12/24)

§3 で解説した Bridgeland の量子群の構成 [B13] では, “複体の Hall 代数” を考えるのが最初のステップでした. そのようなものは, 設定は Bridgeland のものとは違うものの, 以前から考えられていていました. その一つとして Toën は [T06] で dg 圏の Hall 代数を導入しました. この節ではそれを説明します.

今まで扱ってきた Ringel-Hall 代数やその変奏は, 考えている Abel 圏の「部分対象の数え上げ」ないし「短完全列の数え上げ」で環構造を定めました. Abel 圏の短完全列は圏の**完全構造**の概念に拡張され, 数え上げの方針は Abel 圏に限らず完全圏や三角圏でも上手くことが知られています (§4.4 参照).

しかしこれを dg 圏でそのまま真似すると構造定数が定まりません (有限でなくなる). Toën は **dg 加群圏のモデル構造** (ホモトピー論的構造) を用いることで, 導来 Hall 代数という複体の Hall 代数の一種を導入しました. この節ではその理論を紹介します.

この節ではホモロジー代数の発展的な内容, 特に三角圏の知識を仮定します. 前半では dg 圏とその dg 加群圏に関する概念を説明し, 後半で導来 Hall 代数を解説します. なお, 正確には普遍集合 (universe) を固定して議論する必要がですが, ここではそういった集合論的な議論は省いて説明します.

4.1 モデル圏と dg 圏

この副節の内容は Toën の導来森田理論の論文 [T07] の一部にあるものですが, その解説である高橋篤史さんの本 [高 12, 第 5 章] に基づいて説明します. まずモデル圏の定義を述べ, dg 圏を導入し, その dg 加群圏がモデル構造を持つこと (定理 4.1.11) , 特にホモトピー圏が三角圏の構造を持つこと (定理 4.1.13) を説明します.

定義 4.1.1. (1) 圏 C における次の可換図式が与えられたとき, 射 f は射 g の**引き込み**であるという.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & D \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

(2) 圏 C における次の可換図式を考える.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

$h \circ i = f$ かつ $p \circ h = g$ となる射 $h : B \to X$ が存在するとき, 射 i は射 p に関して LLP (left lifting property) を持つといい, 射 p は射 i に関して RLP (right lifting property) を持つという.

定義 4.1.2. C を極限および余極限を持つ圏とする. 圏 C 上の**モデル構造**とは, 射の集合 Mor(C) の部分集合

- 弱同値 (weak equivalence) の集合 $\mathcal{W}$
- cofibration の集合 cof
- fibration の集合 fib

および関手的分解と呼ばれる関手 $\alpha, \beta, \gamma, \delta : \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ で以下の条件をみたすもののことである.

(i) (**三の二**): 射 f, g に対して合成 $f \circ g$ が定まるとき, $f, g, f \circ g$ のいずれか二つが $\mathcal{W}$ の元ならば, 残りの一つも $\mathcal{W}$ の元である.

(ii) (**引き込み**): 射 f が射 g の引き込みだとすると, $g \in \mathcal{W}$ ならば $f \in \mathcal{W}$ であり, $g \in \mathrm{cof}$ ならば $f \in \mathrm{cof}, g \in \mathrm{fib}$ ならば $f \in \mathrm{fib}$ である.

(iii) (**LP**): 任意の $i \in \mathrm{cof}$ は任意の $p \in \mathcal{W} \cap \mathrm{fib}$ に関して LLP を持つ. 同様に任意の $i \in \mathcal{W} \cap \mathrm{cof}$ は任意の $p \in \mathrm{fib}$ に関して LLP を持つ.

(iv) (**関手的分解**): 任意の射 $f : A \to B$ に対して, 分解 $f = \alpha(f) \circ \beta(f)$ で $\alpha(f) \in \mathrm{cof}$ かつ $\beta(f) \in \mathcal{W} \cap \mathrm{fib}$ となるもの, および分解 $f = \gamma(f) \circ \delta(f)$ で $\gamma(f) \in \mathcal{W} \cap \mathrm{cof}$ かつ $\delta(f) \in \mathrm{fib}$ となるものが存在する.

以下, 可換環 k を固定します. dg k 加群とは k 加群からなる複体のことでした. 正確には:

定義 4.1.3. $\mathbb{Z}$ 次数付き k 加群 $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M^d$ と次数 1 の k 準同型 $d_M : M \to M$ で $d_M^2 = 0$ をみたすものの組 (M, d_M) を **dg k 加群**と呼ぶ.

定義 4.1.4. k 線形圏 T で以下の条件をみたすものを k 上の **dg 圏**と呼ぶ.

- 任意の対象 $a_1, a_2 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対して射の集合 $\mathsf{T}(a_1, a_2)$ は dg k 加群.
- 任意の対象 $a_1, a_2, a_3 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対して, 射の合成 $- \circ_{\mathsf{T}} - : \mathsf{T}(a_2, a_3) \otimes_k \mathsf{T}(a_1, a_2) \to \mathsf{T}(a_1, a_3)$ は dg k 加群の射.

非自明な dg 圏の例として最初に挙げられるのが dg k 加群のなす dg 圏です.

定義 4.1.5. 次で定まる k 上の dg 圏 $\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k)$ を dg k 加群の dg 圏と呼ぶ.

- $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k))$ はすべての dg k 加群のなす集合.
- $\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k)((M_1, d_{M_1}), (M_2, d_{M_2}))$ は dg k 加群の準同型のなす dg k 加群.

定義 4.1.6. T と U を k 上の dg 圏とする. T から U への **dg 関手** $f : \mathsf{T} \to \mathsf{U}$ は以下のものからなる.

- 写像 $f : \mathrm{Ob}(\mathsf{T}) \to \mathrm{Ob}(\mathsf{U})$, $a \mapsto f_a$.
- 任意の $a_1, a_2 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対し dg k 加群の射 $f_{a_1 a_2} : \mathsf{T}(a_1, a_2) \to \mathsf{U}(f_{a_1}, f_{a_2})$ で次の条件をみたすもの.
  - 任意の $a \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対して $f_{aa}(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{f_a}$.
  - 任意の $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対して以下の dg 加群の図式は可換.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}(b,c) \otimes_k \mathsf{U}(a,b) \arrow[r, "f_{bc} \otimes f_{ab}"] \arrow[d, "- \circ_{\mathsf{T}} -"'] & \mathsf{U}(f_b, f_c) \otimes_k \mathsf{U}(f_a, f_b) \arrow[d, "- \circ_{\mathsf{U}} -"] \\ \mathsf{T}(a,c) \arrow[r, "f_{ac}"'] & \mathsf{U}(f_a, f_b) \end{tikzcd} .$$

唯一の対象からなる dg 圏は dg 代数に他なりません. そこで dg 代数上の dg 加群の一般化, つまり dg 圏上の加群を考えるのは自然です. その説明のため, まず反転 dg 圏を導入しておきます.

定義 4.1.7. k 上の dg 圏 T に対し, 以下のようにして k 上の dg 圏 T^{op} が定まる. これを T の反転 dg 圏という.

- $\mathrm{Ob}(\mathsf{T}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$.
- 任意の対象 $a_1, a_2 \in \mathsf{T}$ に対して $\mathsf{T}^{\mathrm{op}}(a_1, a_2) = \mathsf{T}(a_2, a_1)$.

ここで射の合成は次数に応じて符号を変えて定義しますが, 詳しくは省略します. [高 12, 定義 5.1.5] を参照して下さい.

定義 4.1.8. T を dg 圏とする. dg 関手 $\mathcal{M}\colon \mathsf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k)$ を **dg T 加群**という.

dg 圏の加群のなす圏は自然に dg 圏の構造を持ちます. 次の §4.2 ではこの dg 圏の加群圏から Hall 代数が構成できることを説明します. その準備として, いくつか圏の構成を導入します. dg 加群 (M, d_M) に対し

$$Z^0(M) := \mathrm{Ker}(d_M : M^0 \to M^1), \quad H^0(M) := Z^0(M)/\,\mathrm{Im}(d_M : M^{-1} \to M^0)$$

と書きます.

定義. T を k 上の dg 圏とする.

(1) k 線形圏 $Z^0(\mathsf{T})$ を次のように定める.
- $\mathrm{Ob}(Z^0(\mathsf{A})) := \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$.
- 対象 $a_1, a_2 \in \mathrm{Ob}(Z^0(\mathsf{T})) = \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対して $Z^0(\mathsf{T})(a_1, a_2) := Z^0(\mathsf{T}(a_1, a_2))$.

(2) k 線形圏 $H^0(\mathsf{T})$ を次のように定める.
- $\mathrm{Ob}(H^0(\mathsf{T})) := \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$.
- 対象 $a_1, a_2 \in \mathrm{Ob}(H^0(\mathsf{T}))$ に対して $H^0(\mathsf{T})(a_1, a_2) := H^0(\mathsf{T}(a_1, a_2))$.

ここでは射の合成の定義は省きました. [高 12, 定義 5.1.10] を参照して下さい.

定義 4.1.9. T を k 上の dg 圏とする.

(1) **dg T 加群の dg 圏** $\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T})$ とは k 上の dg 圏 $\mathcal{H}om(\mathsf{T}^{\mathrm{op}}, \mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k))$ のことをいう. ここで $\mathcal{H}om(-,-)$ は k 上の dg 圏と dg 函手のなす圏 $\mathbf{dgcat}(k)$ における内部準同型である.

(2) **dg T 加群の圏** $\mathsf{C}(\mathsf{T})$ とは k 線形圏 $Z^0(\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T}))$ のことをいう.

(3) **dg T 加群のホモトピー圏**とは k 線形圏 $H^0(\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T}))$ のことをいう.

定義 4.1.10. T を k 上の dg 圏とし, $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を dg T 加群とする.

(1) $\mathsf{C}(\mathsf{T})(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ の元 f を **dg T 加群の射**と呼び $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ で表す.

(2) dg T 加群の射 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ が全射 [単射, 擬同型] であるとは, 任意の $a \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対して dg k 加群の射 $f_a : \mathcal{M}_a \to \mathcal{N}_a$ が全射 [単射, 擬同型] であることとする.

定理 4.1.11. T を dg 圏とする. このとき dg T 加群の圏 $\mathsf{C}(\mathsf{T})$ は極限と余極限をもつ Abel 圏である. また dg T 加群の射 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ について

- f は弱同値 $:\Longleftrightarrow$ f が擬同型　　• f は fibration $:\Longleftrightarrow$ f が全射

と定義することで $\mathsf{C}(\mathsf{T})$ にモデル構造が入る. このモデル構造を**射影的モデル構造**と呼ぶ.

$\mathsf{C}(\mathsf{T})$ の弱同値による局所化を考えると, これは以下の定理 4.1.13 が示すように三角圏の構造を持ちます.

定義 4.1.12. T を dg 圏とする. また $\mathsf{C}(\mathsf{T})$ に射影的モデル構造を入れておく.

(1) 圏 $\mathsf{C}(\mathsf{T}) = Z^0(\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T}))$ の擬同型による局所化を $\mathfrak{D}(\mathsf{T})$ で表し, T の**導来圏**という.

(2) cofibrant な dg T 加群のなす $\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T})$ の充満部分 dg 圏を $\mathfrak{D}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T})$ で表し, T の **dg 導来圏**という.

事実 4.1.13. T を dg 圏とする. このとき自然な圏同値 $H^0(\mathfrak{D}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T})) \simeq \mathfrak{D}(\mathsf{T})$ が存在し, 特に $\mathfrak{D}(\mathsf{T})$ は三角圏の構造を持つ.

4.2 導来 Hall 代数

Toën は [T06] において, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の dg 圏 T に対して**導来 Hall 代数**と呼ばれる結合代数 $\mathbf{H}(\mathsf{T})$ を導入しました. その定義を解説します. まず次の局所有限性を満たす dg 圏を考えます.

定義 4.2.1. 体 k 上の dg 圏 T は仮定 2.4.1 (i) および以下の条件を満たすとき**局所有限**であるという.

- 任意の $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対して dg 加群 $\mathsf{T}(x, y)$ のコホモロジーは有界かつ有限次元.

$\mathbb{F}_q$ 上の局所有限な dg 圏 T に対して導来 Hall 代数を定義したいのですが, 線形空間としては [T07] の意味で完全 (perfect) な dg T^{op} 加群の同型類を基底とする空間を考えます. そこでまず完全 dg 加群を説明しましょう.

定義. T を可換環 k 上の dg 圏とする. また dg 加群のシフトを Σ で表す.

(1) 対象 $a \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して dg T 加群 D_a^n を次で定める.

- 写像 $D_a^n : \mathrm{Ob}(\mathsf{T}^{\mathrm{op}}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k))$ を次で与える.

$$b \longmapsto (D_a^n)_b := \left(\Sigma^n \mathsf{T}(b, a) \coprod \Sigma^{n-1} \mathsf{T}(b, a), \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

- 対象 $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対して dg k 加群の射

$$(D_a^n)_{bc} : \mathsf{T}^{\mathrm{op}}(b, c) \longrightarrow \mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k)((D_a^n)_b, (D_a^n)_c)$$

を次で与える. 但し f の次数を $\overline{f}$ で表す.

$$f \longmapsto (D_a^n)_{bc}(f) := \begin{bmatrix} f & 0 \\ d_{\mathsf{T}(c,b)} f & (-1)^{\overline{f}} f \end{bmatrix}.$$

(2) 対象 $a \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対して dg T 加群 $a^\wedge$ を以下で定める.

- $\mathrm{Ob}(\mathsf{T}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathsf{T}) \to \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k))$, $b \mapsto \mathsf{T}(b, a)$.
- $\mathsf{T}(b, c) \to \mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k)(a_b^\wedge, a_c^\wedge) = \mathsf{C}_{\mathrm{dg}}(k)(\mathsf{T}(b, a), \mathsf{T}(c, a))$, $f \mapsto (x \mapsto xf)$.

(3) 対象 $a \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して, dg T 加群 $T^n a^\wedge$ を S_a^n で表す.

対象 $a \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して, dg T 加群の射 $\iota_{n,a} : S_a^n \to D_a^n$ が定まることに注意します.

定義. T を k 上の dg 圏とし, F と P を dg T 加群とする.

(1) 次の条件を満たす dg T 加群の圏 $\mathsf{C}(\mathsf{T})$ における射の列 $0 = F_0 \xrightarrow{f_0} F_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{l-1}} F_l = F$ が存在するとき, F は**自由**であるという: 各 $j \geq 0$ に対して下の図式が押し出し図式となるように $a_j \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ と $n_j \in \mathbb{Z}$ を取れる.

$$\begin{tikzcd} F_j \arrow[r, "f_j"] & F_{j+1} \\ S_{a_j}^{n_j} \arrow[u] \arrow[r, "\iota_{n_j,a_j}"] & D_{a_j}^{n_j} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(2) 自由な F と T の導来圏 $\mathfrak{D}(\mathsf{T})$ における引き込み $P \to F$ が存在するとき, P は**完全**であるという.

例えば T として k 加群圏を取った場合, 完全 dg T 加群とは有限生成射影 k 加群からなる複体のことです. それでは導来 Hall 代数の導入を始めましょう. まず積の定義の準備をします.

定義. 完全 dg T^{op} 加群の全体を $X^{(0)}(\mathsf{T})$, 完全 dg T^{op} 加群間の射全体を $X^{(1)}(\mathsf{T})$ と書く. $\pi_0(X^{(0)}(\mathsf{T}))$ で dg T^{op} 加群の同型類全体を記す. また $x \in X^{(0)}(\mathsf{T})$ と $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\pi_i(X^{(0)}(\mathsf{T}), x)$ を次のように定義する.

$$\pi_1(X^{(0)}(\mathsf{T}), x) := \mathrm{Aut}_{\mathsf{T}}(x), \quad \pi_i(X^{(0)}(\mathsf{T}), x) := \mathrm{Ext}_{\mathsf{T}}^{1-i}(x, x) \quad (i > 1).$$

次の図式を考えます.

$$\begin{tikzcd} X^{(1)}(\mathsf{T}) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "s\times t"'] & X^{0}(\mathsf{T}) \\ X^{(0)}(\mathsf{T}) \times X^{(0)}(\mathsf{T}) & \end{tikzcd}$$

ただし射 $u : x \to y$ に対して

$$s(u) := x, \quad c(u) := y, \quad t(u) := y \coprod_x 0$$

と定めました. また $\coprod$ はファイバー積を意味します.

次に函数空間の設定を説明します. Top を位相空間の圏, $\mathrm{Ho}(\mathsf{Top})$ をそのホモトピー圏とします.

定義 4.2.2. ホモトピー型 $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(\mathsf{Top}))$ が局所有限であるとは, 任意の $x \in X$ に対し $\pi_i(X, x)$ は有限群であり, かつある $n \in \mathbb{N}$ があって $i > n$ なら $\pi_i(X, x) = 0$ となることとする.

$\mathrm{Ho}(\mathsf{Top})^{\mathrm{lf}}$ で局所有限なもののなす部分圏を書く.

T の局所有限性から $X^{(0)}(\mathsf{T})$ や $X^{(1)}(\mathsf{T})$ が $\mathrm{Ho}(\mathsf{Top})^{\mathrm{lf}}$ の対象であることが従います.

ホモトピー型 X について, 集合 $\pi_0(X)$ 上の $\mathbb{C}$ 値写像で有限台をもつものを, 定義 2.1.1 の記号に合わせて $F(X)$ と書きます. つまり

$$F(X) := \{\alpha \colon \pi_0(X) \to \mathbb{C} \mid \alpha(x) \neq 0 \text{ となる } x \in \pi_0(X) \text{ は有限個}\}.$$

また $\mathsf{Top}^{\mathrm{lf}}$ の射 $f : X \to Y$ が固有的 (proper) であるとは, 各 $y \in \pi_0(Y)$ に対して $\{x \in \pi_0(X) \mid f(x) = y\}$ が有限集合であることを言います.

定義 4.2.3. $f : X \to Y$ を $\mathrm{Ho}(\mathsf{Top})^{\mathrm{lf}}$ の射とする.

(1) f が固有的な場合, $f^* \colon F(Y) \to F(X)$ を以下で定義する.

$$f^*(\alpha)(x) := \alpha(f(x)) \quad (\alpha \in F(Y),\ x \in \pi_0(X)).$$

(2) $f_! \colon F(X) \to F(Y)$ を以下で定義する.

$$f_!(\alpha)(y) := \sum_{x \in \pi_0(X),\, f(x) = y} \alpha(x). \prod_{i>0} \Big(|\pi_i(X, x)|^{(-1)^i} \, |\pi_i(Y, y)|^{(-1)^{i+1}} \Big) \quad (\alpha \in F(X),\ y \in \pi_0(Y))$$

定理 4.2.4 ([T06, Definition 3.3, Theorem 4.1])**.** T を $\mathbb{F}_q$ 上の局所有限な dg 圏とする. このとき $\mathbf{DH}(\mathsf{T}) := F(X^0(\mathsf{T}))$ は

$$\mu := c_! \circ (s \times t)^* : \mathbf{DH}(\mathsf{T}) \otimes \mathbf{DH}(\mathsf{T}) \longrightarrow \mathbf{DH}(\mathsf{T})$$

を積とする $\mathbb{C}$ 代数の構造を持つ. これを T の**導来 Hall 代数**と呼ぶ.

注意. ここでは $\mathbb{C}$ 上で定義しましたが, 議論は $\mathbb{Q}$ 上で済みます.

これ以降は, 特殊な場合に $\mathbf{H}(\mathsf{T})$ の構造が生成元と関係式で記述できることを説明します.

事実 4.1.13 より, 任意の dg 圏 T について, dg T 加群のホモトピー圏 $H^0(\mathfrak{D}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T}))$ は三角圏の構造を持ちます. 従って $H^0(\mathfrak{D}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T}))$ の t 構造を考えることができます.

仮定 4.2.5. T は局所有限な $\mathbb{F}_q$ 上の dg 圏であり, ホモトピー圏 $H^0(\mathfrak{D}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{T}))$ の t 構造であってその heart が遺伝的 Abel 圏 A であるものが存在する.

この仮定に現れる heart の Euler 形式を $\chi(\cdot,\cdot)$ と書きます. つまり $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して

$$\chi(x,y) := \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(x,y) - \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(x,y).$$

また $x, y, k, c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対して $a_x := |\mathrm{Aut}_{\mathsf{A}}(x)|$ とし, また $\gamma^{k,c}_{x,y} \in \mathbb{Q}$ を以下で定義します.

$$\gamma^{k,c}_{x,y} := \frac{|V(k,y,x,c)|}{a_x a_y}, \quad V(k,y,x,c) := \{0 \to k \to y \to x \to c \to 0 \mid \mathsf{A} \text{ の完全列 }\}.$$

定理 4.2.6 ([T06, Proposition 7.1])**.** $\mathbb{F}_q$ 上の dg 圏 T は仮定 4.2.5 を満たすものとする. このとき導来 Hall 代数 $\mathbf{H}(\mathsf{T})$ は, $\{Z^{[n]}_x \mid x \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A}), n \in \mathbb{Z}\}$ を生成元とし, 以下を定義関係式とする結合代数と同型.

$$\begin{aligned}
Z^{[n]}_x * Z^{[n]}_y &= \sum_{z \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} g^z_{x,y} Z^{[n]}_z, \\
Z^{[n]}_x * Z^{[n+1]}_y &= \sum_{c,k \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} \gamma^{k,c}_{x,y} q^{-\chi(c,k)} Z^{[n+1]}_k * Z^{[n]}_c, \\
Z^{[n]}_x * Z^{[m]}_y &= q^{(-1)^{n-m}\chi(x,y)} Z^{[m]}_y * Z^{[n]}_x \quad (n-m<-1).
\end{aligned}$$

4.3　古典的導来 Hall 代数

この節では導来 Hall 代数の例として, 古典的 Hall 代数 $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ の導来版を説明します. 特に, § 1 で説明した $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ の原始元 p_n たちに関する Heisenberg 代数が含まれることを示します.

A を $\mathbb{F}_q$ 上の Jordan 箙の冪零表現の圏 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{nil}}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{Jor}}$ とし, T を A の複体のなす dg 圏とします. これは仮定 4.2.5 を満たすので, 定理 4.2.6 が適用できます.

定義. 導来 Hall 代数 $\mathbf{DH}(\mathsf{T})$ を**古典的導来 Hall 代数**と呼んで $\mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ と書く.

定理 4.2.6 より $\mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ は $\{Z^{[n]}_\lambda \mid n \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \mathrm{Par}\}$ を生成元とし以下を定義関係式とする結合代数です.

$$Z^{[n]}_\lambda * Z^{[n]}_\mu = \sum_{\nu \in \mathrm{Par}} g^\nu_{\lambda,\mu} Z^{[n]}_\nu, \tag{4.1}$$

$$Z^{[n]}_\lambda * Z^{[n+1]}_\mu = \sum_{\alpha,\beta \in \mathrm{Par}} \gamma^{\alpha,\beta}_{\lambda,\mu} Z^{[n+1]}_\alpha Z^{[n]}_\beta, \tag{4.2}$$

$$Z^{[n]}_\lambda * Z^{[m]}_\mu = Z^{[m]}_\mu * Z^{[n]}_\lambda \quad (n-m<-1).$$

定義 4.3.1. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $b_{\pm n} \in \mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ を以下で定義する.

$$b_n := \sum_{|\lambda|=n} (q;q)_{\ell(\lambda)-1} Z^{[0]}_\lambda, \quad b_{-n} := \sum_{|\lambda|=n} (q;q)_{\ell(\lambda)-1} Z^{[1]}_\lambda.$$

また $b_0 := 1 \in \mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ とする.

定理 4.3.2. 任意の $m,n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$b_m * b_n - b_n * b_m = \delta_{m+n,0}\frac{m}{q^m-1}.$$

正確には, $mn\neq 0$ なら上の通りで, $mn=0$ のときは $b_m*b_n-b_n*b_m=0$ である.

証明の前に特別な場合を確かめておきます.

例 4.3.3. $(m,n)=(1,-1)$ の場合, (4.2) を使って

$$b_1*b_{-1}-b_{-1}*b_1 = Z^{[0]}_{(1)}*Z^{[1]}_{(1)} - Z^{[1]}_{(1)}*Z^{[0]}_{(1)} = \left(\gamma^{\emptyset,\emptyset}_{(1),(1)}1+Z^{[0]}_{(1)}*Z^{[1]}_{(1)}\right)-Z^{[1]}_{(1)}*Z^{[0]}_{(1)} = \frac{1}{q-1}.$$

$(m,n)=(1,-2)$ の場合は $b_{-2}=\sum_{|\lambda|=2}(q;q)_{\ell(\lambda)-1}Z^{[1]}_{\lambda}=Z^{[1]}_{(2)}+(1-q)Z^{[1]}_{(1^2)}$ より

$$\begin{aligned} b_1*b_{-2} &= Z^{[0]}_{(1)}*Z^{[1]}_{(2)}+(1-q)Z^{[0]}_{(1)}*Z^{[1]}_{(1^2)},\\ b_{-2}*b_1 &= Z^{[1]}_{(2)}*Z^{[0]}_{(1)}+(1-q)Z^{[1]}_{(1^2)}*Z^{[0]}_{(1)}. \end{aligned}$$

ここで (4.2) から

$$\begin{aligned} Z^{[0]}_{(1)}*Z^{[1]}_{(2)} &= \gamma^{(2),(1)}_{(1),(2)}Z^{[1]}_{(2)}*Z^{[0]}_{(1)}+\gamma^{(1),\emptyset}_{(1),(2)}Z^{[1]}_{(1)},\\ Z^{[0]}_{(1)}*Z^{[1]}_{(1^2)} &= \gamma^{(1^2),(1)}_{(1),(1^2)}Z^{[1]}_{(1^2)}*Z^{[0]}_{(1)}+\gamma^{(1),\emptyset}_{(1),(1^2)}Z^{[1]}_{(1)}. \end{aligned}$$

$\gamma^{\mu,\lambda}_{\lambda,\mu}=1$ であることはすぐにわかる. 確認すべきことは $Z^{[1]}_{(1)}$ の係数が 0 になることである.

$$\begin{aligned} \gamma^{(1),\emptyset}_{(1),(2)} &= \frac{e^{(2)}_{(1),(1)}}{a_{(1)}a_{(2)}} = \frac{g^{(2)}_{(1),(1)}a_{(1)}a_{(1)}}{a_{(1)}a_{(2)}} = \frac{(q-1)}{q(q-1)} = \frac{1}{q},\\ \gamma^{(1),\emptyset}_{(1),(1^2)} &= \frac{e^{(1^2)}_{(1),(1)}}{a_{(1)}a_{(1^2)}} = \frac{g^{(1^2)}_{(1),(1)}a_{(1)}a_{(1)}}{a_{(1)}a_{(1^2)}} = \frac{(q^2-1)(q-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^2-q)} = \frac{1}{q(q-1)}. \end{aligned}$$

これより $\gamma^{(1),\emptyset}_{(1),(2)}-(1-q)\gamma^{(1),\emptyset}_{(1),(1^2)}=0$. これらより $b_1*b_{-2}-b_{-2}*b_1=0$ がわかる.

定理 4.3.2 の証明. (4.1) と $g^{\lambda}_{\mu,\nu}=g^{\lambda}_{\nu,\mu}$ により $mn\geq 0$ のとき $b_m*b_n=b_n*b_m$ であることはすぐにわかる. $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ とし, $b_m*b_{-n}-b_{-n}*b_m$ を考える

$c_\lambda:=(q;q)_{\ell(\lambda)-1}$ とおくと $p_l=\sum_{|\lambda|=l}c_\lambda[I_\lambda]$ と書ける. すると, $\Delta(p_l)=p_l\otimes 1+1\otimes p_l$ が成り立つことは以下と同値である.

$$\sum_{\lambda}c_\lambda e^{\lambda}_{\mu,\nu}a_\lambda^{-1}=0 \quad (\mu,\nu\neq\emptyset), \quad e^{\lambda}_{\mu,\emptyset}=e^{\lambda}_{\emptyset,\mu}=\delta_{\lambda,\mu}a_\lambda \tag{4.3}$$

$e^{\lambda}_{\mu,\nu}=g^{\lambda}_{\mu,\nu}a_\mu a_\nu$ であることを思い出すと

$$\gamma^{\alpha,\beta}_{\mu,\nu}=\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}}\frac{e^{\mu}_{\lambda,\alpha}e^{\nu}_{\beta,\lambda}}{a_\lambda a_\mu a_\nu} \tag{4.4}$$

と書けるので

$$b_m*b_{-n}=\sum_{|\mu|=m}\sum_{|\nu|=n}c_\mu c_\nu Z^{[0]}_{\mu}Z^{[1]}_{\nu}=\sum_{|\mu|=m}\sum_{|\nu|=n}c_\mu c_\nu\sum_{\alpha,\beta\in\mathrm{Par}}\gamma^{\alpha,\beta}_{\mu,\nu}Z^{[1]}_{\alpha}Z^{[0]}_{\beta}$$

分割 α, β を固定する．(4.4) を用いて $Z^{[1]}_\alpha Z^{[0]}_\beta$ の係数を計算すると

$$\sum_{|\mu|=m}\sum_{|\nu|=n} c_\mu c_\nu \gamma^{\alpha,\beta}_{\mu,\nu} = \sum_{|\mu|=m}\sum_{|\nu|=n}\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}} c_\mu c_\nu \frac{e^\mu_{\lambda,\alpha} e^\nu_{\beta,\lambda}}{a_\lambda a_\mu a_\nu} = \sum_{\lambda\in\mathrm{Par},|\mu|=m} c_\mu e^\mu_{\lambda,\alpha} a_\lambda^{-1} a_\mu^{-1} \sum_{|\nu|=n} c_\nu e^\nu_{\beta,\lambda} a_\nu^{-1}$$

ここで (4.3) を用いることにより

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda\in\mathrm{Par},|\mu|=m} c_\mu e^\mu_{\lambda,\alpha} a_\lambda^{-1} a_\mu^{-1} (\delta_{\beta,\emptyset} c_\lambda + \delta_{\lambda,\emptyset}\delta_{|\beta|,n} c_\beta) \\
&= \delta_{\beta,\emptyset} \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}} c_\lambda a_\lambda^{-1} \sum_{|\mu|=m} c_\mu e^\mu_{\lambda,\alpha} a_\mu^{-1} + \delta_{|\beta|,n} c_\beta \sum_{|\mu|=m} c_\mu e^\mu_{\emptyset,\alpha} a_\mu^{-1} \\
&= \delta_{\beta,\emptyset} \sum_{|\lambda|=m} c_\lambda a_\lambda^{-1} \delta_{\alpha,\emptyset}\delta_{m,n} c_\lambda + \delta_{|\alpha|,m}\delta_{|\beta|,n} c_\alpha c_\beta \\
&= \delta_{\alpha,\emptyset}\delta_{\beta,\emptyset}\delta_{m,n} \sum_{|\lambda|=m} c_\lambda^2 a_\lambda^{-1} + \delta_{|\alpha|,m}\delta_{|\beta|,n} c_\alpha c_\beta.
\end{aligned}$$

α, β に関して足し上げを行うことにより，

$$b_m * b_{-n} = \delta_{m,n}\langle p_m, p_m\rangle_m + b_{-n} * b_m.$$

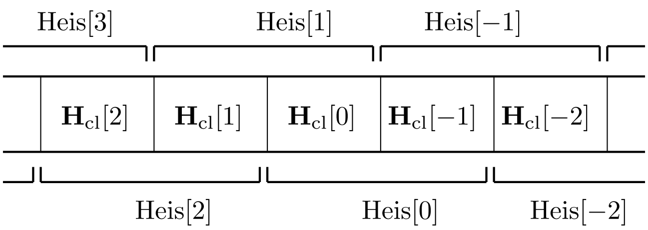
□

つまり $\{b_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ によって $\mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ の部分代数として Heisenberg 代数が構成されることが分かりました．また $\mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ の関係式 (4.1) より代数埋め込み

$$\mathbf{H}_{\mathrm{cl}} \longhookrightarrow \mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}, \quad [I_\lambda] \longmapsto Z^{[1]}_\lambda \tag{4.5}$$

があることが分かります．埋め込みの像を $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}[0] \subset \mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ と書きます．

以上の議論は複体をシフトしても通用するので，$\mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ には無限個の Heisenberg 代数が埋め込まれていることが従います (下図参照)．



これ以降は埋め込み (4.5) で $\mathbf{H}_{\mathrm{cl}}$ の元を $\mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ の元とみなします．特に

$$P_\lambda = q^{n(\lambda)} Z^{[1]}_\lambda \in \mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}.$$

そして $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $p_n, \partial_{p_n} \in \mathbf{DH}_{\mathrm{cl}}$ を次で定めます．

$$p_n := b_{-n}, \quad \partial_{p_n} := \frac{q^n - 1}{n} b_n.$$

上で説明した Heisenberg 代数の応用として，P_λ を固有関数とする作用素を構成します．構成には次のような頂点作用素を用います:

$$D(z) := \exp\Big(\sum_{n\geq 1}(1-q^n)\frac{p_n}{n}(qz)^n\Big) * \exp\Big(-\sum_{n\geq 1}\partial_{p_n}(qz)^{-n}\Big).$$

厳密に言うと, これは Heisenberg 代数の次数付けに関する完備化に係数を持つ z の級数として定義されます. $D(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} D_n z^n$ と展開して D_n を定めれば $D_n \in \mathrm{End}(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}})$ とみなせることに注意します.

命題 4.3.4. $D_0 \in \mathrm{End}(\mathbf{H}_{\mathrm{cl}})$ とみなしたとき

$$D_0\big(P_\lambda\big) = P_\lambda \cdot q^{\ell(\lambda)}.$$

Heisenberg 代数のもう一つの応用として, Jing が [Ji91] で示した頂点作用素による Hall–Littlewood 対称函数の構成 ([M95, Chap. Ⅲ §5 Exercise 8] を参照) を, 導来 Hall 代数を使って再解釈することもできます.

4.4 参考文献

この節で仮定したホモロジー代数や三角圏に関する事項は様々な本で学べます. 例えば [GM03] や, 近刊の日本語の書籍だと [中 15] があります. dg 圏について書かれている日本語の書籍は少ないのですが, §4.1 の冒頭で言及した [高 12] があります. モデル圏は [高 12, 付録 C] で簡単に解説されていますが, もう少し詳しく勉強したい人向けの本として [H99] があります.

この節の冒頭で述べた, 完全圏に対する Hall 代数は [Hu05] で考察されていて, また三角圏に対する Hall 代数や付随する Lie 環は [PX00] で調べられています.

§4.3 の内容は, 当時修士課程の学生だった下地涼介さんとの共著論文 [SY21] に基づきます. そこで扱っているのは定理 4.2.6 を遺伝的な heart が Jordan 箙の冪零表現圏である場合です. 他に調べられている状況として, heart が Dynkin 箙の表現圏 $\mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q_{\mathrm{ADE}}$ の場合があります. この場合の導来 Hall 代数は, Hernandez と Leclerc の仕事 [HL15] により, 量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g}_{\mathrm{ADE}})$ の有限次元表現のなすテンソル圏の Grothendieck 環の ν 変形 ($\nu := \sqrt{q}$) と同型であることが知られています. また導来 Hall 代数の他の研究として, §3 の Bridgeland-Hall 代数との関係を調べている論文 [LP19] があります.

参考文献

[ASS06] B. Assem, D. Simon, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol 1, London Math. Soc. Stud. Texts **65**, Cambridge Univ. Press, 2006.

[B13] T. Bridgeland, *Quantum groups via Hall algebras of complexes*, Ann. Math. (2) **177** (2013), no. 2, 739–759

[BS12] I. Burban, O. Schiffmann, *On the Hall algebra of elliptic curve I*, Duke Math. J. **161**, no. 7 (2012), 1171–1231.

[CP94] V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, 1994,

[CB] B. Crawley-Boevey, *Lectures on representations of quivers*, notes for a graduate course at Oxford University (1992), available at https://www.math.uni-bielefeld.de/~wcrawley/.

[D87] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, 1986, pp. 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[GM03] S. I. Gelfand, Yu. I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, 2nd. Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003.

[Go18] M. Gorsky, *Semi-derived and derived Hall algebras for stable categories*, Int. Math. Res. Not., **2018** (1) (2018), 138–159.

[Gr95] J. A. Green, *Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups*, Invent. Math. **120** (1995), 361–377.

[HL15] D. Hernandez, B. Leclerc, *Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras*, J. reine angew. Math. **701** (2015), 77–126.

[H99] M. Hovey, *Model categories*, Math. Surv. Monog. **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Hu05] A. Hubery, *From triangulated categories to Lie algebras: A theorem of Peng and Xiao*, in *Trends in representation theory of algebras and related topics*, 51–66, Contemp. Math. **406**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[Ji91] N. Jing, *Vertex operators and Hall–Littlewood symmetric functions*, Adv. in Math. **87** (1991), 226–248.

[Jos95] A. Joseph, *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergebn. Math. Grenz. (3), **29**. Springer, Berlin, 1995.

[Joy18] D. Joyce, *Ringel–Hall style vertex algebra and Lie algebra structures on the homology of moduli spaces*, preprint (2018), available from his webpage.

[K97] M. Kapranov, *Eisenstein series and quantum affine algebras*, J. Math. Sci. (New York) **84** (1997), no. 5, 1311–1360.

[KSV17] M. Kapranov, O. Schiffmann, E. Vasserot, *The Hall algebra of a curve*. Sel. Math. **23** (2017) no. 1, 117–177.

[LP19] M. Lu, L. Peng, *Modified Ringel-Hall algebras, Green's formula and derived Hall algebras*, J. Alg. **526** (2019), 81–103.

[LP21] M. Lu, L. Peng, *Semi-derived Ringel-Hall algebras and Drinfeld double*, Adv. in Math. **383** (2021), 107668 (72pp.).

[L91] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.

[M95] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995.

[N94] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 2, 365–416.

[N98] H. Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 3, 515–560.

[N01] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc., **14** (2001), no. 1, 145–238

[PX00] L. Peng, J. Xiao, *Triangulated categories and Kac-Moody algebras*, Invent. Math., **140** (2000), 563–603.

[R90a] C. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), no. 3, 583–591.

[R90b] C. Ringel, *Hall algebras*, in *Topics in algebra, Part 1* (Warsaw, 1988), 433–447, Banach Center Publ., **26**, Part 1, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1990.

[R93] C. M. Ringel, *Hall algebras revisited*, in *Quantum deformations of algebras and their representations* (Ramat-Gan, 1991/1992; Rehovot, 1991/1992), Israel Math. Conf. Proc., Vol. 7, 171–176, 1993.

[R96] C. M. Ringel, *Green's theorem on Hall algebras*, in *Representation theory of algebras and related topics* (Mexico City, 1994), 185–245, CMS Conf. Proc., **19**, AMS (1996).

[S06] O. Schiffmann, *Lectures on Hall algebras*, in *Geometric methods in representation theory. II*, pp. 1–141, Sémin. Congr., 24-II, Soc. Math. France, Paris, 2012; arXiv:math/0611617v2.

[SV12] O. Schiffmann, E. Vasserot, *Hall algebras of curves, commuting varieties and Langlands duality*, Math. Ann. **353** (2012), 1399–1451.

[SY21] R. Shimoji, S. Yanagida, *A study of symmetric functions via derived Hall algebra*, Comm. Algebra **49** (2021), Issue 3, 979–1005.

[T06] B. Toën, *Derived Hall algebras*, Duke Math. J. **135** (2006), no. 3, 587–615.

[T07] B. Toën, *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory*, Invent. Math. **167** (2007), 615–667.

[X97] J. Xiao, *Drinfeld double and Ringel-Green theory of Hall algebras*, J. Algebra **190** (1997), no. 1, 100–144.

[X08] J. Xiao, F. Xu, *Hall algebras associated to triangulated categories*, Duke Math. J. **143** (2008), 357–373.

[Y16] S. Yanagida, *A note on Bridgeland's Hall algebra of two-periodic complexes*, Math. Z. **282** (2016), 973–991.

[Z81] A. Zelevinsky, *Representations of finite classical groups. A Hopf algebra approach*, Lect. Note Math. **869**, Springer-Verlag, 1981.

[高 12] 高橋篤史, **弦理論の代数的基礎**, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリー **89**, サイエンス社, 2012.

[中 15] 中岡宏行, **圏論の技法**, 日本評論社, 2015.

[柳 18] 柳田伸太郎, 2018 年度東京大学集中講義「Hall 代数と Macdonald 理論」(2018/12/03–07) の講義

ノート, https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2018UT.html から入手可.