現代数学基礎 CⅢ　12 月 16 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. f は正則関数であって, 定義域にある任意の z に対して $f'(z) \neq 0$ だとする. この f に対し, 関数 $S(f)$ を次で定める.

$$S(f) := \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

また, $ad - bc \neq 0$ を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対し, $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ で定まる関数 T を**一次変換**と呼ぶ. 以下の主張を示せ.

(1) 任意の一次変換 T に対して $S(T \circ f) = S(f)$.

(2) f が一次変換ならば $S(f) = 0$. (実は逆も成立する.)

解答. (1) $T \circ f = \dfrac{af+b}{cf+d}$ と書くと, 繰り返し微分して

$$(T \circ f)' = \frac{ad-bc}{(cf+d)^2} f', \ (T \circ f)'' = \frac{ad-bc}{(cf+d)^2}\left(f'' - \frac{2c}{cf+d}(f')^2\right), \ \frac{(T \circ f)''}{(T \circ f)'} = \frac{f''}{f'} - \frac{2c}{cf+d} f'.$$

従って

$$\left(\frac{(T \circ f)''}{(T \circ f)'}\right)' = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2c}{cf+d} f'' + \frac{2c^2}{cf+d}(f')^2,$$
$$\left(\frac{(T \circ f)''}{(T \circ f)'}\right)^2 = \left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \frac{4c}{cf+d} f'' + \frac{4c^2}{(cf+d)^2}(f')^2$$

となり, $S(T \circ f) = S(f)$ が得られる.

(2) (1) で $f = \mathrm{id}$, つまり $f(z) = z$ とすると, $T \circ \mathrm{id} = T$ なので $S(T) = S(T \circ \mathrm{id}) = S(\mathrm{id})$. 一方で $(\mathrm{id})'' = 0$ より $S(\mathrm{id}) = 0$ となるなので $S(T) = 0$. よって示せた.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.8 点でした.

(2) の逆について. $g := f''/f'$ と置くと

$$S(f) = 0 \iff \frac{g'(z)}{g(z)^2} = \frac{1}{2}.$$

両辺を z で積分すると, C を積分定数として

$$-\frac{1}{g(z)} = \frac{z}{2} + C \iff g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{-2}{z+2C}.$$

この等式の両辺を再び積分すると, D を積分定数として

$$\operatorname{Log} f'(z) = -2\operatorname{Log}(z+2C) + D \iff f'(z) = \frac{e^D}{(z+2C)^2}.$$

もう一度積分すると, E を積分定数として $f(z) = E - \dfrac{e^D}{z+2C}$. 定数を置き直すと $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.