現代数学基礎 CⅢ　12 月 09 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 次の等式を示せ. 但し n は任意の正整数であり, $a!! := a(a-2)(a-4)\cdots$ である.

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}} \;=\; \frac{1}{2i}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

解答. $f(z) := (1+z^2)^{-(n+1)} = (z+i)^{-n-1}\cdot(z-i)^{-n-1}$ は $z=i$ で位数 $n+1$ の極を持つので,

$$f(z) \;=\; f_{-n-1}(z-i)^{-n-1} + f_{-n}(z-i)^{-n} + \cdots + f_{-1}(z-i)^{-1} + f_0 + f_1(z-i) + \cdots$$

と Laurent 展開できる. $(z-i)^{n+1}f(z)$ を考えれば

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \;&=\; f_{-1} \;=\; \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\Big((z-i)^{n+1}f(z)\Big)\Big|_{z=i} \;=\; \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z+i)^{-n-1}\Big|_{z=i} \\
&=\; \frac{1}{n!}(-n-1)(-n-2)\cdots(-2n)\cdot(z+i)^{-2n-1}\Big|_{z=i} \\
&=\; (-1)^n\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!}\cdot(2i)^{-2n-1} \;=\; \frac{1}{2i}\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\frac{1}{2^{2n}}. \;=\; \frac{1}{2i}\frac{(2n)!}{(2n)!!\cdot(2n)!!} \\
&=\; \frac{1}{2i}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.
\end{aligned}$$

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 3.0 点でした.
問題の等式は講義ノートの問題 7.1.11 の解答で用いています.