現代数学基礎 CⅢ　中間試験解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. 等式 $\log z = 2 + i\pi/6$ を満たす複素数 z を全て求めよ. 但し log は (特に分岐を指定しない) 複素対数関数を表す.

解答. 極座標を使って $z = re^{i\theta}$ とすると $\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$. よって $\log r = 2$ かつ $\theta + 2n\pi = \pi/6$, つまり $z = e^2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6) = e^2(\sqrt{3}+i)/2$.

コメント. 10 点満点で採点しました. $z = e^{2+i(2n+1/6)\pi i}$, $n \in \mathbb{Z}$ のような不要な自由度があるものは 5 点にしました. 平均点は 7.3 点でした.

問題 2. 次の複素積分 I の値を求めよ.

$$I := \int_C z^{1/n} dz.$$

但し n は正の整数であり, また C は単位円 $|z| = 1$ の上半分に正の向きを入れた積分路である. そして冪関数 $z^{1/n}$ の分岐は, $z = 1$ で $z^{1/n}$ の偏角が 0 になるものとする.

解答. C のパラメータ表示 $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ を使って

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi e^{i\theta/n} \cdot ie^{i\theta} d\theta = \left[\frac{e^{i(1+1/n)\theta}}{1+1/n}\right]_0^\pi = \frac{n}{1+n}\left(e^{i(1+1/n)\pi} - 1\right) \\ &= \frac{-n}{1+n}\left(e^{i\pi/n} + 1\right) = \frac{-n}{1+n}\left(\cos\tfrac{\pi}{n} + 1 + i\sin\tfrac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

コメント. パラメータ表示を使って複素積分を実積分に書き換えるところまでを 10 点, 残りを 10 点として, 計 20 点満点で採点しました. $e^{i\pi/n}$ の部分を $(-1)^{1/n}$ と書いているものは, 分岐が不明なため 5 点減点しています. 平均点は 14.9 点でした.

問題 3. a を有理数ではない実数とする. 複素関数 $f(z) := \dfrac{\tan\pi z}{z-a}$ の全ての孤立特異点を求め, さらに極に対してはその位数と留数を求めよ.

解答. $f(z) = \frac{\sin\pi z}{(z-a)\cos\pi z}$ である. 分子の $\sin\pi z$ は整関数であり, 分母の $z-a$ の零点は $z = a$ で 1 位, また $\cos\pi z$ の零点は $z = n + \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ で 1 位である. 仮定より $a \ne n + \frac{1}{2}$ だから, $f(z)$ の孤立特異点は $z = a$ と $n + \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ で, 全て 1 位の極である. 前者の留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \tan\pi a.$$

後者の留数は, ロピタルの定理を使って

$$\operatorname*{Res}_{z=n+\frac{1}{2}} f(z) = \lim_{z\to n+\frac{1}{2}}\left(z - (n+\tfrac{1}{2})\right)f(z) = \lim_{z\to n+\frac{1}{2}} \frac{\sin\pi z}{z-a}\frac{z-(n+\frac{1}{2})}{\cos\pi z}$$

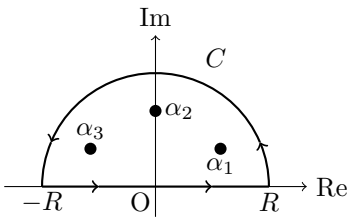
$$= \lim_{z\to n+\frac{1}{2}} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{(n+\frac{1}{2})-a} \frac{\left(z-(n+\frac{1}{2})\right)'}{(\cos\pi z)'} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{(n+\frac{1}{2})-a} \frac{-1}{\pi\sin(n+\frac{1}{2})\pi} = \frac{-1}{\pi(n+\frac{1}{2}-a)}.$$

コメント. 極の位置と位数を 10 点, $z=a$ の留数を 5 点, $z=n+\frac{1}{2}$ の留数を 15 点として, 計 30 点満点で採点しました. a に関して不要な場合分けをしている場合は 5 点減点しました. 平均点は 20.7 点でした.

問題 4. 半径 R の上半円 C と線分 $[-R,R]$ からなる閉積分路 γ 上での複素積分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^6+1}dz$ を利用して, 次の実積分 I の値を求めよ.

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx.$$

解答. $f(z) := \frac{1}{z^6+1}$ と書くと, f は積分路上とその内部から極を除いた所で正則だから, 留数定理が使える. R が十分大きければ, 閉積分路 γ の内部にある f の極は $\alpha_k := e^{i(2k+1)\pi/6}$ $(k=0,1,2)$ で, それぞれ 1 位である (右図を参照). 留数定理より



$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\Big(\sum_{k=1}^{3} \operatorname*{Res}_{z=\alpha_k} f(z)\Big).$$

$z=\alpha_k$ での留数は, ロピタルの定理と $\alpha_k^6=-1$ であることを使うと

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_k} f(z) = \lim_{z\to\alpha_k} \frac{z-\alpha_k}{z^6+1} = \left.\frac{(z-\alpha_k)'}{(z^6+1)'}\right|_{z=\alpha_k} = \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=\alpha_k} = \frac{1}{6\alpha_k^5} = -\frac{\alpha_k}{6}.$$

半円 C での積分は, R が十分大きければ

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \ell(C)\cdot\sup_{z\in C}|f(z)| = \pi R\cdot\sup_{z\in C}\frac{1}{|z^6+1|} = \frac{\pi R}{R^6-1}$$

と評価できるので, $R\to\infty$ で $\int_C f(z)dz \to 0$. 従って求めたい積分 I は

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\Big(\int_C f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(z)dz\Big) = \lim_{R\to\infty}\int_\gamma f(z)dz \\ &= 2\pi i\Big(\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{Res}_{z=\alpha_k} f(z)\Big) = -2\pi i\Big(\frac{e^{\pi i/6}}{6}+\frac{i}{6}+\frac{e^{5\pi i/6}}{6}\Big) = -2\pi i\cdot\frac{2i}{6} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

コメント. 留数定理を使うところまでを 5 点, 留数の計算を 15 点, $\int_C$ の評価を 10 点, 残りを 10 点として, 計 40 点満点で計算しました. 平均点は 32.5 点でした.

全体のコメント

計 $10+20+30+40=100$ 点で採点しました. 平均点は $7.3+14.9+20.7+32.5=75.4$ 点でした. 答案 1 枚目の名前欄の横に xx 点と書いてあるのが点数です. 得点分布は次の通りです.

得点	–59	60–74	75–84	85–94	95–
人数	9	13	14	11	11