現代数学基礎 CⅢ　11 月 18 日分小テスト解答

ver. 2021.11.20
担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 複素関数

$$f(z) \coloneqq \frac{1}{\sin \pi z} = \frac{2i}{\exp(i\pi z) - \exp(-i\pi z)}$$

の孤立特異点を全て求め, そのうち極については位数と留数を計算せよ.

解答. $\sin \pi z$ は $z = n \in \mathbb{Z}$ を 1 位の零点とする整関数だから, $f(z)$ については $z = n$ が 1 位の極で, 孤立特異点はそれだけである. 留数について, まず $z = 0$ の場合は $\exp(\pm i\pi z)$ の Taylor 展開から

$$f(z) = \frac{2i}{2i\pi z + O(z^3)} = \frac{1}{\pi z}\frac{1}{1 + O(z^2)} = \frac{1}{\pi z}\bigl(1 + O(z^2)\bigr) = \frac{1}{\pi z} + O(z).$$

ここで $O(z^k)$ は z に関して k 次以上の項からなる級数を表す. 従って $\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{\pi}$. 次に $z = 1$ の場合は, $z = w + 1$ と置くと $\sin\bigl(\pi(w+1)\bigr) = -\sin \pi w$ だから,

$$f(z) = f(w+1) = -f(w) = -\frac{1}{\pi w} + O(w) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{z-1} + O(z-1).$$

よって $\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{\pi}$. 一般の $z = n \in \mathbb{Z}$ の場合は, f が周期 2 を持つ, つまり $f(z+2) = f(z)$ となることから

$$\operatorname*{Res}_{z=n} f(z) = \begin{cases} \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{\pi} & (n \text{ は偶数}) \\ \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -\dfrac{1}{\pi} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}.$$

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.3 点でした. 極と位数が適切に求められていること, 留数の値が正しいこと, それらが適切な手法で行われていることを各 1 点で採点しました.